МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О.М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ
ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ, САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
ТА КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ
З ДИСЦИПЛІНИ

“ОСНОВИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ”

(для студентів 3 курсу заочної форми навчання за напрямом підготовки 6.060101 ”Будівництво” спеціальностей “Промислове та цивільне будівництво”, “Міське будівництво та господарство”)

Харків
ХНУМГ
2013

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт, самостійної роботи та контрольних робіт з дисципліни “Основи системного аналізу” (для студентів 3 курсу заочної форми навчання за напрямом підготовки 6.060101 “Будівництво” спеціальностей “Промислове та цивільне будівництво”, “Міське будівництво та господарство”) / Харк. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О.М. Бекетова; уклад.: М. В. Федоров, О. М. Хренов. – Х. : ХНУМГ, 2013. – 59 с.

Укладачі: М. В.Федоров,
О. М. Хренов

Методичні вказівки побудовані за вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу та узгоджені з орієнтовною структурою змісту навчальної дисципліни, рекомендованою Європейською Кредитно-Трансферною Системою (ECTS).

Рекомендовано для студентів будівельних спеціальностей.

Рецензент: к. т. н., доц. І. В. Наумейко

Затверджено кафедрою прикладної математики та інформаційних технологій, протокол № 1 від 31 серпня 2011р.

ЗМІСТ

Вступ

Мета та завдання вивчення дисципліни “Основи системного аналізу”: формування у майбутніх фахівців системного мислення, усвідомлення необхідності застосування системного підходу до вирішення завдань проектування об'єктів будівництва, а також при експлуатації та управлінні цими об'єктами.

В результаті вивчення дисципліни студент повинен знати поняття, визначення, склад і структуру системи; типи систем; декомпозицію та агрегування систем; процедури системного аналізу; системний підхід до розв’язування інженерних задач; методологію пошуку рішень; методи розв’язання лінійних та нелінійних моделей. Він також повинен вміти формулювати цілі системи, формувати функціональну структуру системи, класифікувати системи за обраним класом математичних моделей, застосовувати методи обчислювальної математики для розрахунків обраних моделей, формулювати задачі оптимізації.

Лабораторна робота № 1

Побудова ієрархій для системи з циклами

Задача, розглянута в цій роботі багато, в чому аналогічна задачі №1, розглянутої в контрольній роботі №1, але її особливість полягає в тому, що аналізована система є більш складною й подана графом з циклами. Тому для її рішення спочатку потрібно об'єднати елементи, пов'язані циклом, у групи (у класи еквівалентності).

Елементи x_i і x_j пов'язані циклом, якщо вони відповідають відношенню: «Існує шлях з елемента x_i в елемент x_j і назад». Зокрема, при i = j елемент x_i може замикатися на себе, тобто є циклічним елементом. У матриці залежності цикл між елементами x_i, x_j е послідовністю одиниць у відповідних осередках, що зв'язують x_i і x_j, наприклад, якщо (i, j) = 1 і (j, i) = 1, то x_i, x_j пов'язані циклом; якщо (i, j) = 1 і (j, k) = 1 і (k, i) = 1, то x_i, x_j пов'язані циклом і т. ін. Циклічний елемент у матриці залежності е одиницею у відповідному йому осередку, наприклад, якщо (i, i) = 1, то елемент x_i циклічний. Після виконання зазначеної операції об'єднання множина елементів виявляється розбитою на кілька класів еквівалентності, наприклад: C1 = {x1, x5, x6)}, C2 = {x3, x4}, C3 = {x2, x7, x10}, C4 = {x8} і т. ін. Елементи у кожному класі пов'язані між собою циклами, тобто вважаються нерозрізненими. Потім алгоритм рішення задачі, розглянутої в роботі № 1, застосовується вже не до окремих елементів, а до класів C1, C2, C3, C4, тому що ці класи утворюють простий граф без контурів. Для побудови рівнів порядку на класах у вихідній матриці всі одиниці в осередках матриці, що пов'язують елементи одного класу, замінюються нулями. Після цього до рядків і стовпців одного класу застосовується операція додавання.

Задача. За результатами іспитів продукції були виявлені типові несправності і проведене їхнє ранжирування за рядом ознак. Відповідна матриця залежностей подана в таблиці. Побудуйте рівні порядку на множині несправностей по відношенню переваги (“не менш важливий ніж”). Підсумковий результат подайте у вигляді порядкового графа.

Зразок розв’язання задачі (табл. 1 – 5, рис. 1 – 4).

Таблиця 1 – Матриця залежностей

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	1	0	0
3	0	1	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	0	0	0	0	0	0	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	

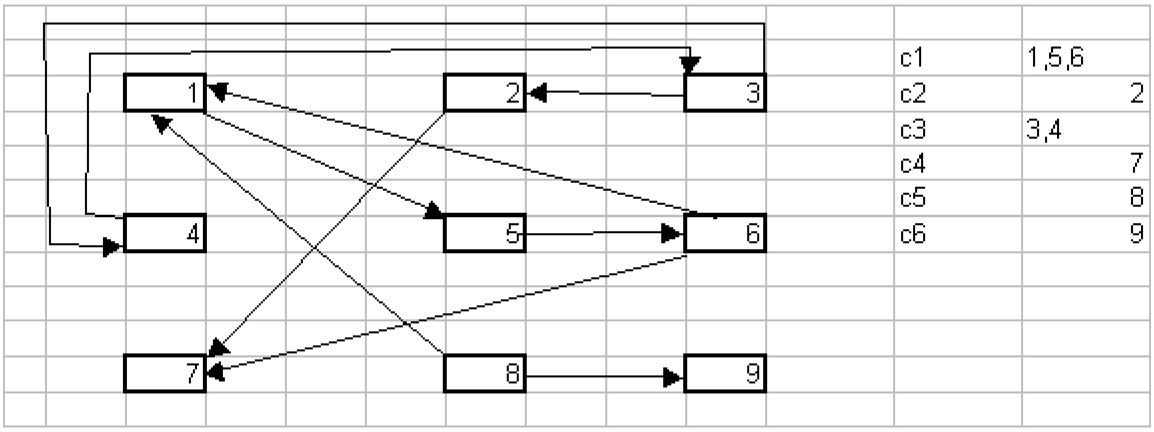

Рис. 1 – Вихідний спрямований граф

Таблиця 2 – Побудова матриці залежностей класів еквівалентності

	c1	c2	c3	c3	c1	c1	c4	c5	c6
c1									
c2							1		
c3		1							
c3									
c1									
c1							1		
c4									
c5	1								1
c6									

Таблиця 3 – Матриця залежностей класів еквівалентності

	c1	c2	c3	c4	c5	c6
c1				1		
c2				1		
c3		1				
c4						
c5	1					1
c6						

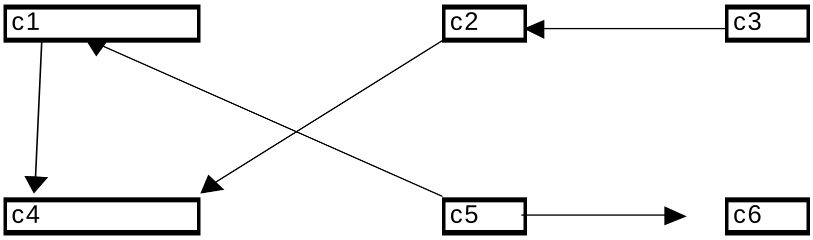

Рис. 2 – Вихідний спрямований граф класів еквівалентності.

Таблиця 4 – Матриця досяжності класів еквівалентності

	c1	c2	c3	c4	c5	c6
c1	1			1		
c2		1		1		
c3		1	1	1		
c4				1		
c5	1			1	1	1
c6						1

Таблиця 5 – Рівні порядку на класах еквівалентності

Рівень 1

	$R(h_i)$	$A(h_i)$	$R(h_i)$ and $A(h_i)$	
c1	c1,c4	c1,c5	c1	
c2	c2,c4	c2,c3	c2	
c3	c2,c3,c4	c3	c3	c3
c4	c4	c1,c2,c3,c4,c5	c4	
c5	c1,c4,c5,c6	c5	c5	c5
c6	c6	c5,c6	c6	

Рівень 2

c1	c1,c4	c1	c1	c1
c2	c2,c4	c2	c2	c2
c4	c4	c1,c2,c4	c4	
c6	c6	c6	c6	c6

Рівень 3

c4	c4	c4	c4	c4

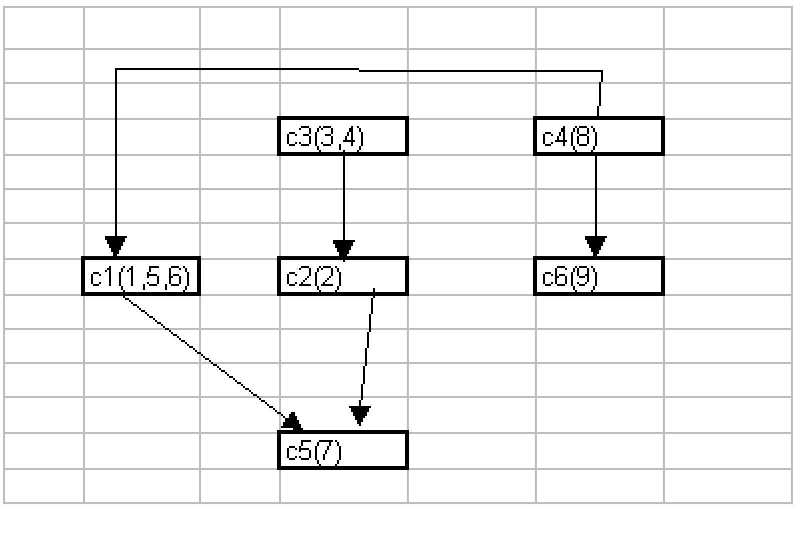

Рис. 3 – Ієрархічна структура графа класів еквівалентності

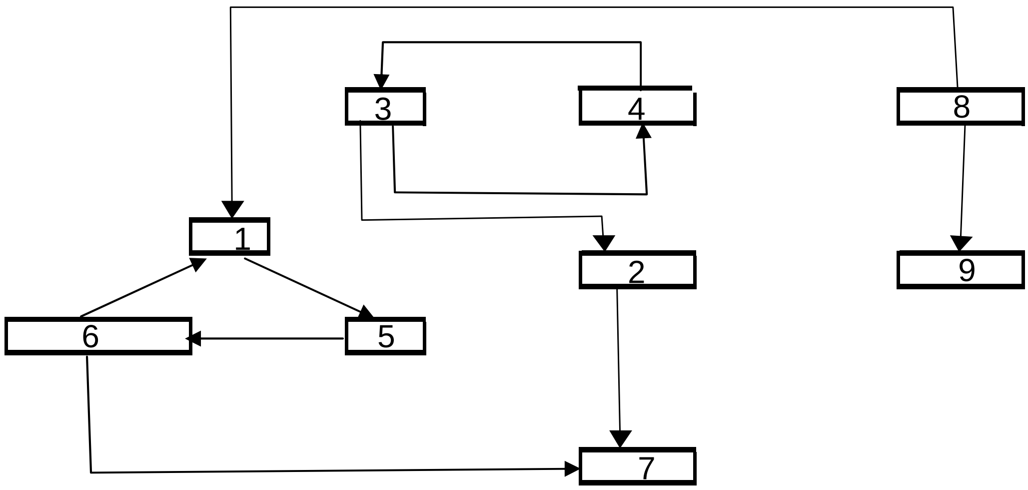

Рис. 4 – Ієрархічна структура вихідного графа.

Порядок виконання роботи.

1. Побудувати матрицю залежностей для свого варіанта. Для одержання варіанта завдання варто викреслити m-й рядок і m-й стовпець, а також k-й рядок і k-й стовпець з вихідної матриці (рядки й стовпці, які залишились, не перенумеровуються).

Таблиця 6 – Вихідна матриця залежностей

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
3	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
8	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
10	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

Значення m і k вибираються з таблиці 7 відповідно до номера варіанта. Номер варіанта визначається двома останніми цифрами залікової книжки. n – номер утворений двома останніми цифрами залікової книжки; r – номер варіанта:

$$r = \begin{cases} n, & 0 \le n \le 54 \\ n - 54, & n \ge 54 \end{cases}$$

Таблиця 7 – Значення m і k

r	m	k		r	m	k		r	m	k
1	1	2		19	1	4		37	4	9
2	2	3		20	2	5		38	5	10
3	3	4		21	3	6		39	6	11
4	4	5		22	4	7		40	1	7
5	5	6		23	5	8		41	2	8
6	6	7		24	6	9		42	3	9
7	7	8		25	7	10		43	4	10
8	8	9		26	8	11		44	5	11
9	9	10		27	1	5		45	1	8
10	1	3		28	2	6		46	2	9
11	2	4		29	3	7		47	3	10
12	3	5		30	4	8		48	4	11
13	4	6		31	5	9		49	1	9
14	5	7		32	6	10		50	2	10
15	6	8		33	7	11		51	3	11
16	7	9		34	1	6		52	1	10
17	8	10		35	2	7		53	2	11
18	9	11		36	3	8		54	1	11

2. Об'єднати елементи, пов'язані циклом, у групи (у класи еквівалентності).

3. Побудувати матрицю залежності класів еквівалентності.

4. Побудувати спрямований граф для отриманої матриці залежності класів еквівалентності.

5. Використовуючи отриманий граф, побудувати матрицю досяжності класів еквівалентності.

6. За даними матриці досяжності побудувати рівні ієрархії класів еквівалентності. З цією метою для кожної ітерації аналізу необхідно побудувати таблиці аналогічні тим, що розглядалися в попередній роботі.

7. Підсумковий результат подати у вигляді порядкового графа.

Контрольні запитання

1. У якому випадку елементи x_i і x_j пов’язані циклом?

2. Як відбувається розбивка вихідної множини системи з циклами на класи еквівалентності?

3. Як перетворюється матриця залежності системи з циклами для побудови рівнів порядку?

4. Що таке алгоритм побудови рівнів ієрархії для системи з циклами?

Лабораторна робота № 2

Методи пошуку і вибору рішень. Похідні критерії прийняття рішень. Критерій Гурвіца. Критерій Ходжа - Лемана. Критерій Гермейєра

Критерій Гурвіца (HW-критерій)

Намагаючись зайняти найбільш урівноважену позицію, Гурвіц запропонував критерій, оцінна функція якого знаходиться між граничним оптимізмом і крайнім песимізмом.

$$z_{HW} = \max_i e_{ir} = \max_i \left(c \min_j e_{ij} + (1-c) \max_j e_{ij} \right), \qquad (1)$$

де $0 \le c \le 1$ – множник ваги.

Тоді $E_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i \left(c \min_j e_{ij} + (1-c) \max_j e_{ij} \right) \wedge 0 \le c \le 1 \right\}$.

Правило вибору відповідно до HW-критерію формулюється в такий спосіб: матриця рішень $\left\| e_{ij} \right\|$ доповнюється стовпцем, що містить середні зважені найменшого і найбільшого результатів для кожного рядка.

Обираються ті варіанти E_{i0}, у рядках яких є найбільші показники елемента e_{ir} цього стовпця.

Для $c = 1$ критерій Гурвіца перетворюється в ММ-критерій, а для $c = 0$ він перетворюється в критерій азартного гравця. Найчастіше множник ваги приймається в якості деякої «середньої» точки зору, $c = 0{,}5$.

При виборі HW-критерію ставляться такі вимоги:

– про ймовірності появи станів F_j нічого невідомо;
– реалізується лише мала кількість рішень;
– допускається деякий ризик.

Критерій Ходжа-Лемана (HL-критерій)

Оцінна функція цього критерію визначається виразом

$$z_{HL} = \max_i e_{ir} = \max_i \left(\nu \sum_{j=1}^{n} e_{ij} p_j + (1-\nu) \min_j e_{ij} \right), 0 \le \nu \le 1. \qquad (2)$$

Множина оптимальних рішень записується у вигляді

$$E_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i \left[\nu \sum_{j=1}^{n} e_{ij} p_j + (1-\nu) \min_j e_{ij} \right] \wedge 0 \le \nu \le 1 \right\}.$$

Параметр ν виражає ступінь довіри до розподілу ймовірностей. Цей параметр практично не піддається оцінці, тобто вибір параметра ν піддається впливу суб'єктивізму.

Критерій Гермейєра (G-критерій)

Даний критерій орієнтований на величини втрат, тобто на негативні значення усіх e_{ij}.

Як оцінна функція виступає вираз:

$$z_G = \max_i e_{ir} = \max_i \min_j e_{ij} p_j, \qquad (3)$$

тоді $E_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i \min_j e_{ij} p_j \wedge e_{ij} < 0 \right\}$.

Оскільки в господарських задачах переважно доводиться мати справу з витратами, умова $e_{ij} < 0$ звичайно виконується.

У випадку ж, коли серед величин e_{ij} зустрічаються і позитивні значення, можна перейти до негативних значень за допомогою перетворення $e_{ij} - a$, при $a > 0$, де $a = \max_{i,j} e_{ij} + 1$. Вибір оптимального варіанта рішення в значній мірі залежить від a.

Правило вибору відповідно до G-критерію формулюється в такий спосіб: матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється ще одним стовпцем, що містить у кожному рядку найменший добуток наявного у ній результату на ймовірність відповідного стану F_j. Обираються ті варіанти E_{i0}, у рядках яких знаходиться найбільше значення e_{ir} цього стовпця.

G-критерій узагальнює ММ-критерій. У випадку рівномірного розподілу $p_j = \frac{1}{n},\ j = 1,2,...,n$ критерії G і ММ стають ідентичними.

Умови застосовності G-критерію такі:

– імовірності появи станів F_j відомі;
– рішення реалізовується один або багато разів;
– допускається деякий ризик.

Якщо функція розподілу відома не так явно, то при вживанні G-критерію, існує невиправдано великий ризик.

Приклад.

Розглядається задача вибору оптимального варіанта рішення за допомогою похідних критеріїв Гурвіца, Ходжа-Лемана, Гермейєра для матриці рішень із лабораторної роботи №5 з такими ж умовами розподілу ймовірностей появи зовнішніх станів, якщо відомо, що c = 0,5, v = 0,5.

Розв'язання. Спочатку знайдемо оптимальний варіант рішення за допомогою HW-критерію. Для цього визначимо максимальні $\max_j e_{ij}$ і мінімальні $\min_j e_{ij}$ результати кожного рядка і помножимо їх на коефіцієнти (1-c) = 0,5, c = 0,5 відповідно. Адже

$$0{,}5 \times \max_j e_{ij} = \begin{Vmatrix} -2{,}4 \times 0{,}5 \\ -4{,}8 \times 0{,}5 \\ -1{,}2 \times 0{,}5 \\ -1{,}58 \times 0{,}5 \\ -4{,}8 \times 0{,}5 \\ -3{,}11 \times 0{,}5 \\ -3{,}26 \times 0{,}5 \\ -2{,}1 \times 0{,}5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1{,}2 \\ -2{,}4 \\ -0{,}6 \\ -0{,}79 \\ -2{,}4 \\ -1{,}55 \\ -1{,}63 \\ -1{,}05 \end{Vmatrix}$$

$$0{,}5 \times \min_j e_{ij} = \begin{Vmatrix} -8{,}17 \times 0{,}5 \\ -8{,}0 \times 0{,}5 \\ -8{,}5 \times 0{,}5 \\ -9{,}11 \times 0{,}5 \\ -9{,}02 \times 0{,}5 \\ -9{,}26 \times 0{,}5 \\ -6{,}8 \times 0{,}5 \\ -8{,}5 \times 0{,}5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -4{,}08 \\ -4{,}0 \\ -4{,}25 \\ -4{,}55 \\ -4{,}51 \\ -4{,}63 \\ -3{,}4 \\ -4{,}25 \end{Vmatrix}$$

Додатковий стовпець $e_{ir} = \left(c \min_j e_{ij} + (1 - c) \max_j e_{ij} \right)$ набуває вигляду

$$\| e_{ir} \| = \begin{Vmatrix} -1{,}2 \\ -2{,}4 \\ -0{,}6 \\ -0{,}79 \\ -2{,}4 \\ -1{,}55 \\ -1{,}63 \\ -1{,}05 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -4{,}08 \\ -4{,}0 \\ -4{,}25 \\ -4{,}55 \\ -4{,}51 \\ -4{,}63 \\ -3{,}4 \\ -4{,}25 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -5{,}28 \\ -6{,}4 \\ -4{,}85 \\ -5{,}34 \\ -6{,}91 \\ -6{,}18 \\ -5{,}03 \\ -5{,}3 \end{Vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow E_3 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

За формулою (1) значення оцінюючої функції критерію Гурвіца є $Z_{HW} = -4{,}85$, що відповідає оптимальному варіанту $E_{i0} = \{ E_3 \}$.

Застосуємо критерій Ходжа-Лемана для пошуку оптимального варіанта. Знайдемо математичні очікування $\sum_{j=1}^{n} e_{ij} p_j$ і мінімальні елементи $\min_j e_{ij}$ кожного рядка і помножимо їх на коефіцієнти v = 0,5 і (1- v)=0,5, відповідно. Адже

$$0{,}5 \times \sum_{j=1}^{n} e_{ij}\, p_j = \begin{Vmatrix} -5{,}692 \times 0{,}5 \\ -6{,}048 \times 0{,}5 \\ -5{,}756 \times 0{,}5 \\ -6{,}165 \times 0{,}5 \\ -6{,}118 \times 0{,}5 \\ -5{,}366 \times 0{,}5 \\ -5{,}249 \times 0{,}5 \\ -5{,}085 \times 0{,}5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2{,}846 \\ -3{,}024 \\ -2{,}878 \\ -3{,}082 \\ -3{,}059 \\ -2{,}683 \\ -2{,}624 \\ -2{,}542 \end{Vmatrix}$$

$$0{,}5 \times \min_j e_{ij} = \begin{Vmatrix} -8{,}17 \times 0{,}5 \\ -8{,}0 \times 0{,}5 \\ -8{,}5 \times 0{,}5 \\ -9{,}11 \times 0{,}5 \\ -9{,}02 \times 0{,}5 \\ -9{,}26 \times 0{,}5 \\ -6{,}8 \times 0{,}5 \\ -8{,}5 \times 0{,}5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -4{,}08 \\ -4{,}0 \\ -4{,}25 \\ -4{,}55 \\ -4{,}51 \\ -4{,}63 \\ -3{,}4 \\ -4{,}25 \end{Vmatrix}$$

Додатковий стовпець $e_{ir} = \left[v \sum_{j=1}^{n} e_{ij}\, p_j + (1 - v) \min_j e_{ij} \right]$ набуває вигляду

$$\| e_{ir} \| = \begin{Vmatrix} -2{,}846 \\ -3{,}024 \\ -2{,}878 \\ -3{,}082 \\ -3{,}059 \\ -2{,}683 \\ -2{,}624 \\ -2{,}542 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -4{,}08 \\ -4{,}0 \\ -4{,}25 \\ -4{,}55 \\ -4{,}51 \\ -4{,}63 \\ -3{,}4 \\ -4{,}25 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -6{,}926 \\ -7{,}024 \\ -7{,}128 \\ -7{,}632 \\ -7{,}569 \\ -7{,}313 \\ -6{,}024 \\ -6{,}792 \end{Vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow E_7 \\ \\ \end{matrix}$$

Далі застосуємо оцінюючу функцію (2) і знайдемо оптимальний варіант. Оскільки $Z_{HL} = \max_i e_{ir} = -6{,}024$, то такий результат відповідає оптимальному варіанту $E_{i0} = \{ E_7 \}$.

Для використання критерію Гермейєра побудуємо додатковий стовпець $e_{ir} = \min_j \left(e_{ij}\, p_j \right)$:

$$\min_j \begin{Vmatrix} -5{,}1\times0{,}3 & -7{,}5\times0{,}1 & -2{,}4\times0{,}1 & -7{,}1\times0{,}1 & -8{,}17\times0{,}1 & -6{,}2\times0{,}1 & -3{,}85\times0{,}1 & -6{,}4\times0{,}1 \\ -5{,}7\times0{,}3 & -5{,}06\times0{,}1 & -6{,}3\times0{,}1 & -7{,}9\times0{,}1 & -8{,}0\times0{,}1 & -5{,}1\times0{,}1 & -4{,}8\times0{,}1 & -6{,}22\times0{,}1 \\ -8{,}5\times0{,}3 & -5{,}72\times0{,}1 & -6{,}18\times0{,}1 & -3{,}1\times0{,}1 & -1{,}2\times0{,}1 & -5{,}5\times0{,}1 & -7{,}2\times0{,}1 & -3{,}16\times0{,}1 \\ -7{,}5\,1\times0{,}3 & -6{,}15\,v0{,}1 & -4{,}2\times0{,}1 & -1{,}58\times0{,}1 & -7{,}7\times0{,}1 & -6{,}2\times0{,}1 & -9{,}\,11\times0{,}1 & -4{,}18\times0{,}1 \\ -4{,}8\times0{,}3 & -6{,}12\times0{,}1 & -6{,}0\times0{,}1 & -8{,}2\times0{,}1 & -5{,}13\times0{,}1 & -7{,}14\times0{,}1 & -9{,}02\times0{,}1 & -5{,}17\times0{,}1 \\ -3{,}11\times0{,}3 & -5{,}46\times0{,}1 & -6{,}2\times0{,}1 & -7{,}3\times0{,}1 & -3{,}11\times0{,}1 & -9{,}26\times0{,}1 & -7{,}0\times0{,}1 & -6{,}0\times0{,}1 \\ -5{,}17\times0{,}3 & -3{,}26\times0{,}1 & -5{,}4\times0{,}1 & -4{,}8\times0{,}1 & -6{,}8\times0{,}1 & -5{,}3\times0{,}1 & -6{,}12\times0{,}1 & -5{,}3\times0{,}1 \\ -2{,}1\times0{,}3 & -6{,}83\times0{,}1 & -5{,}2\times0{,}1 & -5{,}7\times0{,}1 & -6{,}11\times0{,}1 & -8{,}5\times0{,}1 & -5{,}4\times0{,}1 & -6{,}81\times0{,}1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \min_j \begin{Vmatrix} -1{,}53 & -0{,}75 & -0{,}24 & -0{,}71 & -0{,}82 & -0{,}62 & -0{,}39 & -0{,}64 \\ -1{,}71 & -0{,}51 & -0{,}63 & -0{,}79 & -0{,}80 & -0{,}51 & -0{,}48 & -0{,}62 \\ -2{,}55 & -0{,}57 & -0{,}62 & -0{,}31 & -0{,}12 & -0{,}55 & -0{,}72 & -0{,}32 \\ -2{,}25 & -0{,}62 & -0{,}42 & -0{,}16 & -0{,}77 & -0{,}62 & -0{,}91 & -0{,}42 \\ -1{,}44 & -0{,}61 & -0{,}60 & -0{,}82 & -0{,}51 & -0{,}71 & -0{,}90 & -0{,}52 \\ -0{,}93 & -0{,}55 & -0{,}62 & -0{,}73 & -0{,}31 & -0{,}93 & -0{,}70 & -0{,}60 \\ -1{,}55 & -0{,}33 & -0{,}54 & -0{,}48 & -0{,}68 & -0{,}53 & -0{,}61 & -0{,}53 \\ -0{,}63 & -0{,}68 & -0{,}52 & -0{,}57 & -0{,}61 & -0{,}85 & -0{,}54 & -0{,}68 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{Vmatrix} -1{,}53 \\ -1{,}71 \\ -2{,}55 \\ -2{,}25 \\ -1{,}44 \\ -0{,}93 \\ -1{,}55 \\ -0{,}85 \end{Vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ = \| e_{ir} \| \\ \\ \\ \\ \leftarrow E_8 \end{array}$$

Величина оцінюючої функції відповідно до формули (3) є $Z_G = \max_i e_{ir} = -0{,}85$.

Знайдемо оптимальний варіант розв'язання: $E_{i0} = \{ E_8 \}$.

Порядок виконання роботи

Дано матрицю рішень розміром 8×8, результатами якої є або прибуток або збитки. Здійснити вибір оптимального варіанта рішення за допомогою критеріїв:

1. Гурвіца.
2. Ходжа – Лемана.
3. Гермейєра.

Матриця рішень і розподіл імовірностей появи зовнішніх станів оибираються за номером утвореним двома останніми цифрами залікової книжки:

n – номер, утворений двома останніми цифрами залікової книжки;

k – номер варіанта;

$$k = \begin{cases} n & 1 \le n \le 42 \\ n-42 & 43 \le n \le 84 \\ n-84 & 85 \le n \le 99 \end{cases}.$$

Якщо дві останні цифри в номері залікової книжки дорівнюють нулю, то k=42.

Варіанти матриці рішень і розподіл імовірностей появи зовнішніх станів зазначені відповідно в таблицях 25 і 26 задачі № 4 контрольної роботи.

Контрольні запитання.

1. Критерій Гурвіца (HW-критерій).
2. Вимоги, які ставляться під час вибору критерію Гурвіца (HW-критерію).
3. Критерій Ходжа-Лемана (HL-критерій).
4. Критерій Гермейєра (G-критерій).
5. Умови застосування критерію Гермейєра (G-критерію).

Лабораторна робота № 3

Класифікація об'єктів. Стратегія середнього зв'язку, що не зважується. Гнучка стратегія. Стратегія агломеративного об'єднання

Стратегія середнього зв'язку, що не зважується

Запропонована Міченером і Сокелом у 1958 році як «засіб боротьби» із крайностями стратегій найближчого й далекого сусіда. Найчастіше використовується варіант, коли обчислюють середню арифметичну подібність між об'єктами кластера й кандидатом на включення. Стратегія монотонна.

$$d_{kh} = \alpha_1 d_{ik} + \alpha_2 d_{jk} + \beta d_{ij} + \gamma \left| d_{ik} - d_{jk} \right| \qquad (4)$$

k = 1,2,...,i-1,i+1,...,j-1,j+1,...,n,

Параметри стратегії у формулі (4) такі $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5, \beta = \gamma = 0.$

Тобто,

$$d_{kh} = 0.5\, d_{ik} + 0.5\, d_{jk} \quad .$$

Така стратегія вибудовує кластери, що у просторі ознак утворюють гіперсфери.

Гнучка стратегія: $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta = 1,\ \alpha_1 = \alpha_2, \beta < 1, \gamma = 0.$ Стратегія монотонна, її властивості цілком залежать від β. Якщо $\beta > 0$, то стратегія стискає простір і, навпаки, розтягує простір при $\beta < 0$. На практиці, звичайно, використовують значення $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.625,\ \beta = -0.25,\ \gamma = 0.$

$$d_{kh} = 0.625\, d_{ik} + 0.625\, d_{jk} - 0.25\, d_{ij}$$

Стратегія дає кластери у вигляді гіперсфер.

Стратегія агломеративного об'єднання така: $\alpha_1 = \alpha_2 = 1,\ \beta = \gamma = 0.$

$$d_{kh} = d_{ik} + d_{jk}$$

Усі перераховані стратегії належать до класу монотонних стратегій з параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma$, для яких справедливі нерівності:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta \geq 1, \quad \alpha_1 + \alpha_2 \geq 0, \quad \gamma \geq -\min(\alpha_1, \alpha_2).$$

Порядок виконання роботи

Дано матрицю ознак розміром 8×2. Класифікувати об'єкти в подібні групи, використовуючи як метрику Евклідову відстань і такістратегії об'єднання:

1. Стратегію середнього незваженого зв'язку.
2. Гнучку стратегію.
3. Стратегію агломеративного об'єднання.

Матриця ознак обирається за номером утвореним двома останніми цифрами залікової книжки:

n – номер, утворений двома останніми цифрами залікової книжки,

k – номер варіанта.

$$k = \begin{cases} n & 1 \leq n \leq 42 \\ n - 42 & 43 \leq n \leq 84 \\ n - 84 & 85 \leq n \leq 99 \end{cases}$$

Якщо дві останні цифри в номері залікової книжки дорівнюють нулю, то k = 42.

Варіанти зазначені в таблиці 25 задачі № 4 контрольної роботи. З вихідної матриці, як матриці ознак обирають перші два стовпці, при цьому знак числа не враховується.

Контрольні запитання

1. Стратегія середнього незваженого зв'язку.
2. Гнучка стратегія.
3. Стратегія агломеративного об'єднання.

Самостійна робота студента

Для опанування матеріалу дисципліни, окрім лабораторних занять, студенти повинні виконати певну самостійну роботу. Зміст самостійної роботи, обсяг в годинах та необхідні літературні джерела наведено в табл. 8

Таблиця 8 – План самостійної роботи

№ теми	Назва теми та її зміст	Обсяг в годинах	Літературні джерела
1	2	3	4
Модуль 1. Основи системного аналізу		48	–
ЗМ 1.1 Поняття системи. Системна характеристика інженерних задач		25	–
1	**Системи та їхні властивості. Аналіз і синтиз в системних дослідженнях.** Визначення системи. Типи систем. Мета і задачі системного аналізу. Декомпозиція й агрегування систем. Поняття про ієрархії. Структуризація відносин	10	Л1, Л2, Д1,Д2,Д3 М1, М2
2	**Метод аналізу ієрархій** Шкала Т. Сааті. Експертне оцінювання пріоритетів. Розрахунок локальних пріоритетів. Синтез пріоритетів	15	Л1, Л2, Д1, Д2, Д3, М1, М2
	ЗМ 1.2 Методи розв'язання інженерних задач.	23	–
3	**Методи пошуку і вибору рішень** Мінімаксний критерій. Критерій Байєса-Лапласа. Критерій Севіджа. Критерій Гурвіца. Критерій Ходжа-Лемана. Критерій Гермейєра	11	Л3, Д1, М1, М3
4	**Кластерний аналіз** Призначення кластерного аналізу. Нормування показників. Способи визначення близькості між об'єктами (метрики). Ієрархічні агломеративні методи. Дендрограма. Стратегії об'єднання	12	Л4, Д1, М1, М3
	Усьго	48	–

Інформаційно-методичне забезпечення

Інформаційно-методичне забезпечення дисципліни складається з основної, додаткової та методичної літератури, що подається у вигляді табл. 9

Таблиця 9 - Інформаційно-методичне забезпечення дисципліни

Позначення джерела	Бібліографічні описи, Інтернет-адреси	ЗМ, де застосовується
Рекомендована основна навчальна література		
Л1	Лямець В. І. Системний аналіз. Вступний курс / В. І. Лямець, А. Д. Тевяшев. – Х. : ХНУРЕ, 2004. – 448с.	ЗМ1.1
Л2	Романов В. Н. Системний аналіз для інженерів / В. Н. Романов. – Спб : Спб. держ. університет, 1998. – 196с.	ЗМ1.1
Л3	Мушик Э. Методи прийняття технічних рішень / Э. Мушик, П. Мюллер. – М. : Світ, 1990. – 208 с.	ЗМ1. 2
Л4	Мандель І. Д. Кластерний аналіз / І. Д. Мандель. – М. : Фінанси і статистика, 1988. – 202с.	ЗМ1. 2
Додаткові джерела		
Д1	Моісєєв Н. Н. Математичні моделі системного аналізу / Н. Н. Моісєєв. – М. : Наука.- 1981. – 205с.	ЗМ1.1 – 1. 2
Д2	Спіцнадель В. Н. Основи системного аналізу: навч. посібник / В. Н. Спіцнадель. – Спб. : Бізнес-преса, 2000 р. – 326 с.	ЗМ1.1
Д3	Гліненко Л. К. Основи моделювання технічних систем : навчальний посібник / Л. К. Гліненко, О. Г. Сухоносов. – Львів: Бескид Біт, 2003. – 176 с.	ЗМ1.1
Методичне забезпечення		
М1	Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з курсу “Основи системного аналізу” для студентів 2 курсу спец. ПЦБ, МБГ, ТОРБ, ОПБ / Упоряд. М. В. Федоров, О.М. Хренов. – Х. : ХНАМГ, 2012. – 62с.	ЗМ1.1 -1. 2
М2	Романов В. Н. Основи системного аналізу. Методичні вказівки до практичних занять / В. Н. Романов. – Спб.: СЗПІ, 2000. – 53с.	ЗМ1.1
М3	Методичні вказівки до лабораторних робіт з курсу “Теорія прийняття рішень в задачах контролю та управління” для студентів денної форми навчання спеціальностей “Прикладна математика”, “Системний аналіз та управління”, "Інформатика" / Упоряд. Д. О. Примаков, Л. Ю. Артюх. – Х. : ХТУРЕ, 1999. – 48 с.	ЗМ1. 2

Контрольна робота

Задача № 1

Побудова ієрархій (структуризація відносин). Математична модель ієрархії. Поняття про ієрархії

Ієрархія – це система, що складається з об'єктів (елементів), згрупованих у незалежні підмножини (групи). Об'єкти *i-ої* групи знаходяться під впливом об'єктів *(i+1)* групи і, у той же час, впливають на об'єкти *(i-1)* групи. Ці групи розташовані певним чином (над або під іншою групою), називаються рівнями (або кластерами). Вважається (для багатьох задач), що елементи одного рівня незалежні.

Існує кілька видів ієрархій, два з яких представлені на рис. 5:

- домінантні ієрархії (а, б);
- холархії (в).

Домінантні ієрархії бувають повними й неповними. Повними називаються такі, у яких кожний елемент нижнього *(i+1)* рівня зв'язаний з кожним елементом *i-го* рівня, а неповними називаються такі ієрархії, для яких ця умова не виконується, тобто деякі елементи *(i+1)* рівня пов'язані не з усіма елементами *i-го* рівня.

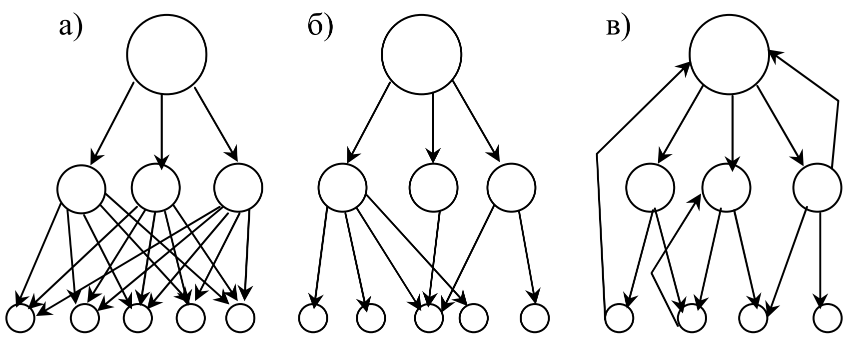

Рис. 5 – Види ієрархій: а) домінантна повна; б) домінантна неповна; в) холархія.

Холархіями називають домінантні ієрархії зі зворотним зв'язком. Холархії також бувають повними й неповними.

Існує ще один вид ієрархій, який називають іноді "китайською скринькою". Він є таким співвідношенням між класами об'єктів, коли один клас об'єктів є підмножиною більшої множини, що, у свою чергу, є підмножиною наступних ще більших множин і т. ін. Таку ієрархічну структуру має навколишній світ з усіма його складними об'єктами.

Побудова простих ієрархій домінантного типу

Припустимо, що існує деяка множина елементів, між якими встановлено певні відносини.

Опис такої системи може бути реалізований у двох взаємозалежних формах: у вигляді бінарної матриці й у вигляді спрямованого графа.

Бінарна матриця може бути подана як матриця досяжності, що визначається за матрицею залежності.

Матриця залежності *B* заповнюється в такий спосіб. Якщо множина вершин *H* визначена, то за допомогою бінарного відношення «залежить від» можна заповнити матрицю так, що відповіді «так» фіксують «одиницею», а відповіді «ні» фіксують «нулем», тобто елемент b_{ij} матриці дорівнює

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{якщо } i \textit{ залежить від } j, \\ 0, \textit{якщо } i \textit{ не залежить від } j. \end{cases}$$

Побудувавши в такий спосіб матрицю, переходимо до формування матриці досяжності.

Для цього формуємо бінарну матрицю $(I+B)$, де I – одинична матриця, і зводимо її у деякий ступінь k, такий, що виконується умова: $(I+B)^{k-1} \leq (I+B)^k = (I+B)^{k+1}$.

Матриця $(I+B)^k = (I+B)^{k+1}$ і буде матрицею досяжності.

Матриця досяжності може бути побудована і більш простим способом, безпосередньо за вихідним спрямованим графом. У цьому графі дуга виходить із залежного елемента. Заповнення матриці бінарними елементами здійснюється по рядку (ліворуч / праворуч) за правилом:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ якщо з } i \textit{ можно попасти в } j, \\ 0, \textit{ інакше.} \end{cases}$$

Наявність матриці досяжності дозволяє розділити множину вершин на підмножини рівнів.

Для цього вершини розділяють на досяжні й попередні.

Вершину h_j називають досяжною з вершини h_i, якщо в орієнтованому графі існує шлях із h_i до h_j. Позначимо підмножину вершин, досяжних із вершини h_i через $R(h_i)$. Вершину h_j називають попередньою щодо вершини h_i, якщо можливо досягнути h_i із h_j. Позначимо підмножину вершин, що передують вершині h_i через $A(h_i)$.

Множина тих вершин $A(h_i) = R(h_i) \cap A(h_i)$, для яких виконується умова недосяжності з кожної вершини множини Н, що залишилися може бути позначена як рівень ієрархії. Тобто, для структуризації деякої множини елементів *H*, пов'язаних визначеними відносинами залежності, необхідно виконати такі процедури:

1. Скласти спрямований граф відносин між елементами множини *H*.
2. Сформувати матрицю досяжності за спрямованим графом.
3. Сформувати таблицю з елементами h_i, $R(h_i)$, $A(h_i)$ і $R(h_i) \cap A(h_i)$.

Для формування підмножини $R(h_i)$ з *i-ої* рядка матриці досяжності виписуються номери тих елементів, що містять одиниці. Для формування підмножини $A(h_i)$ з *i-го* стовпця матриці досяжності виписуються номери тих елементів, що містять одиниці.

Підмножина $R(h_i) \cap A(h_i)$ формується як логічне перетинання (сполучення) елементів двох підмножин .

4. Знайти елементи в таблиці, для яких виконується умова:

$$A(h_i)=R(h_i)\cap A(h_i).$$

Ці елементи й утворять перший рівень.

5. Викреслити отримані на першій ітерації елементи і застосувати вищеописані процедури (п. п. 1 – 4) знову. Ітерації повторюються доти, доки залишається більше ніж один елемент.

Описану вище методику структуризації продемонструємо на такому прикладі.

Припустимо, що необхідно ієрархічно структурувати такі компоненти (елементи), як:

– економічна безпека (ЕНБ);
– військова безпека (ВБ);
– екологічна безпека (ЕЛБ);
– сільськогосподарський сектор економіки (СХ);
– сектор економіки, що виробляє електронну й обчислювальну техніку (ВТ);
– сектор машинобудування (МШ);
– сектор енергетичний (ЕН).

Спрямований граф відносин між елементами, розташованими довільним чином, поданий на рис. 6.

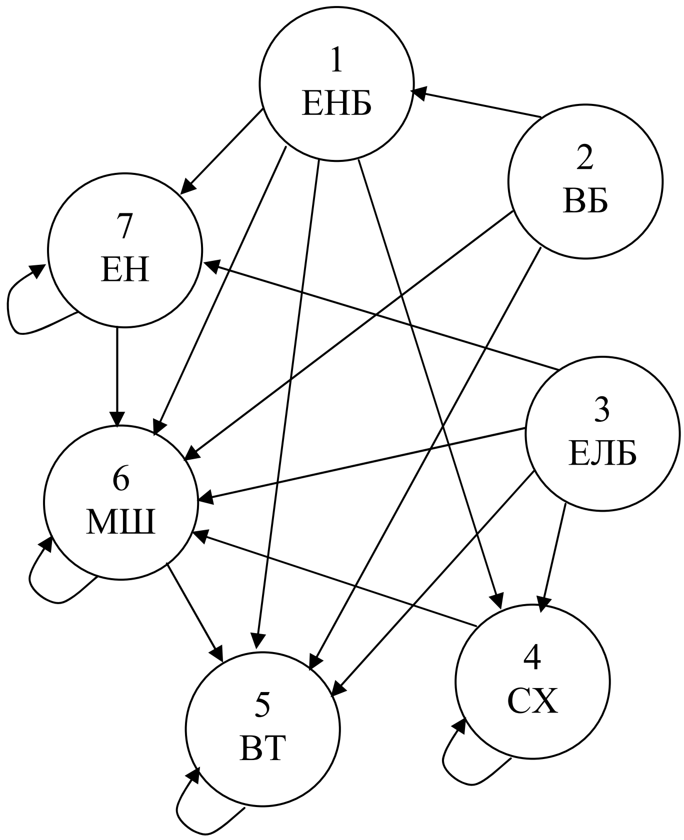

Рис. 6 – Вихідний спрямований граф

Напрямок стрілки дуги визначається спрямованістю залежності: стрілка вказує на елемент, від якого залежить елемент, із якого вона виходить.

Таблиця 10 – Матриця залежності

		1	2	3	4	5	6	7
		ЕНБ	ВБ	ЕЛБ	СХ	ВТ	МШ	ЕН
1	ЕНБ	0	0	0	1	1	1	1
2	ВБ	1	0	0	0	1	1	0
3	ЕЛБ	0	0	0	1	1	1	1
4	СХ	0	0	0	1	0	1	0
5	ВТ	0	0	0	0	1	0	0
6	МШ	0	0	0	0	1	1	0
7	ЕН	0	0	0	0	0	1	1

Таблиця 11 – Матриця досяжності

		1	2	3	4	5	6	7
		ЕНБ	ВБ	ЕЛБ	СХ	ВТ	МШ	ЕН
1	ЕНБ	1	0	0	1	1	1	1
2	ВБ	1	1	0	1	1	1	1
3	ЕЛБ	0	0	1	1	1	1	1
4	СХ	0	0	0	1	1	1	0
5	ВТ	0	0	0	0	1	0	0
6	МШ	0	0	0	0	1	1	0
7	ЕН	0	0	0	0	1	1	1

Використовуючи матрицю досяжності, будуємо таблицю, що є першою ітерацією аналізу.

Таблиця 12 – Перша ітерація аналізу

h_i	$R(h_i)$	$A(h_i)$	$R(h_i)\cap A(h_i)$
1	1,4,5,6,7	1,2	1
2	1,2,4,5,6,7	2	2
3	3,4,5,6,7	3	3
4	4,5,6	1,2,3,4	4
5	5	1,2,3,4,5,6,7	5
6	5,6,	1,2,3,4,6,7	6
7	5,6,7	1,2,3,7	7

З таблиці 12 зрозуміло, що рівність $A(h_i)=R(h_i)\cap A(h_i)$ виконується для елементів 2 і 3. Отже, вони і є елементами першого рівня.

Викреслюючи з таблиці рядки з номерами 2 і 3, а також викреслюючи з усіх послідовностей цифри 2 і 3, одержуємо другу ітерацію, у якій критеріальна рівність виконується для елемента 1. Він і є елементом другого рівня.

Повторюючи ітерації, одержуємо остаточно п'ять рівнів елементів, що подані на рис. 7.

Таке зображення початкової моделі є більш наочним із огляду на аналіз залежностей одних елементів від інших. Результат ієрархічної структуризації дозволяє зробити висновок, що з огляду на забезпечення безпеки держави критичним є електронна і машинобудівна галузі економіки.

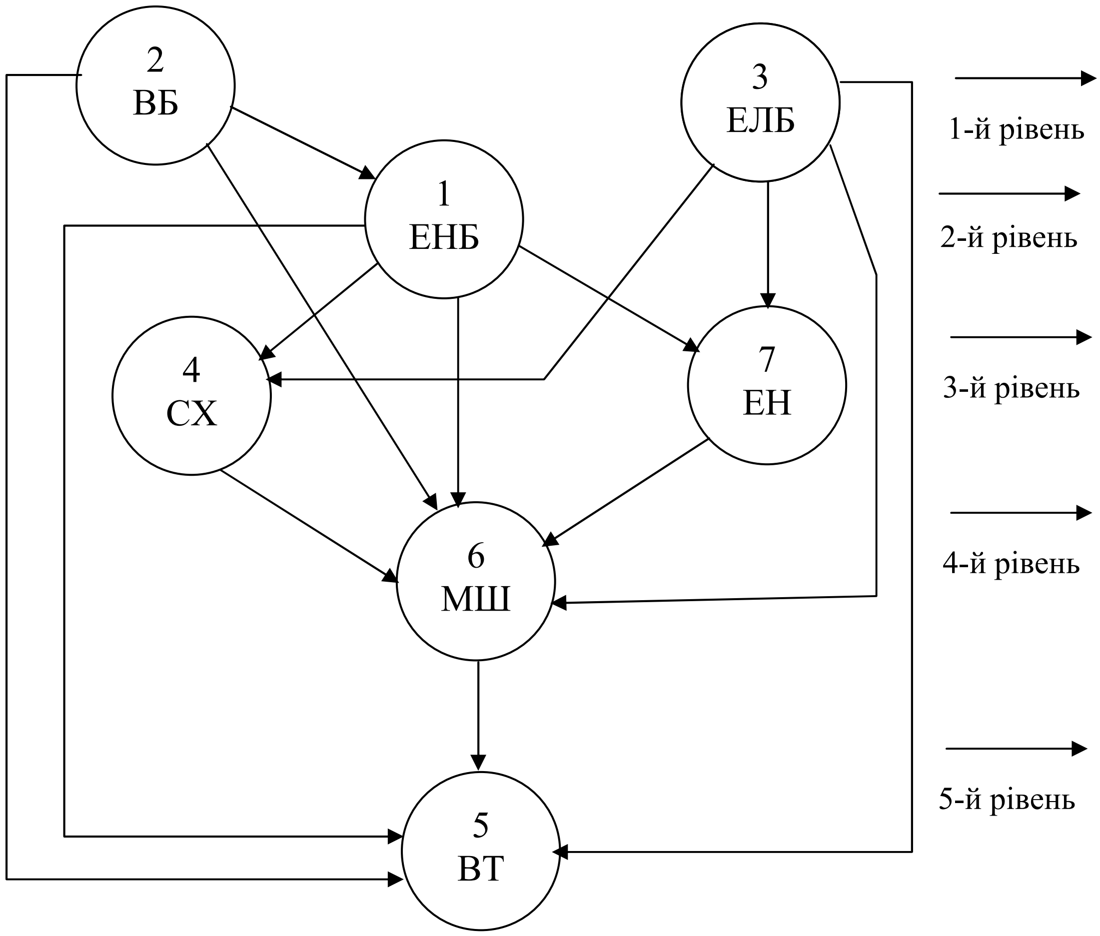

Рис. 7 – Ієрархічна структура вихідного графа.

Порядок виконання роботи

1. Технологічний процес можна розглядати як систему, елементами якої є окремі операції. Їхній взаємозв'язок, зображений як матриця залежностей, наведено в таблиці 13:

Таблиця 13 – Вихідна матриця залежностей

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
6	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
10	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
12	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
14	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Примітка 1. Значення 1 у клітці (i , j) таблиці (де i – рядок, j – стовпець) означає, що операція i залежить від операції j (тобто операція j передує операції i).

Примітка 2. Правило вибору індивідуального варіанта: для одержання варіанта завдання варто викреслити m-й рядок і m-й стовпець, а також k-й рядок і k-й стовпець з вихідної матриці (рядки і стовпці, які залишились не перенумеровуються).

m – остання цифра в номері залікової книжки (якщо остання цифра в номері залікової книжки дорівнює нулю, то m = 10); r – передостання цифра в номері залікової книжки.

k визначається за значенням r за таким правилом:

$$k = \begin{cases} 11, \text{ если } r = 0,1,2 \\ 12, \text{ если } r = 3,4 \\ 13, \text{ если } r = 5,6 \\ 14, \text{ если } r = 7,8,9 \end{cases}$$

Випишіть матрицю залежності для свого варіанта.

2. Побудуйте вихідний спрямований граф для отриманої матриці залежності.

3. Використовуючи граф, побудуйте матрицю досяжності.

4. За даними матриці досяжності побудуйте рівні порядку проходження операцій за чергою. З цією метою для кожної ітерації аналізу необхідно побудувати таблиці, аналогічні розглянутим у прикладі.

5. Підсумковий результат подайте у вигляді порядкового графа.

Контрольні питання.

1. Визначення складної системи.
2. Визначення ієрархії.
3. Види ієрархій.
4. Визначення домінантної ієрархії (повної і неповної).
5. Холархії.
6. Ієрархія виду “китайська скринька”.
7. Матриця залежності.
8. Матриця досяжності.
9. Побудова матриці досяжності з матриці залежності.
10. Побудова матриці досяжності за вихідним графом залежності.
11. Визначення множини досяжних вершин.
12. Визначення множини попередніх вершин.
13. Як формується множина досяжних вершин з використанням матриці досяжності.
14. Як формується множина попередніх вершин з використанням матриці досяжності.
15. Алгоритм побудови рівнів ієрархії.

Задача № 2
Метод аналізу ієрархій. Вектор пріоритетів

Будь-яка проблема є складним об'єктом, що має ієрархічну структуру. Під час аналізу такого об'єкта дослідник, звичайно, зіштовхується зі складною системою взаємодії компонент проблеми (ресурси, мета, впливові особи й групи, політичні, економічні й інші фактори), які потрібно проаналізувати.

Метод аналізу ієрархій (МАІ) є систематичною процедурою для ієрархічного представлення компонентів проблеми. Метод полягає у декомпозиції проблеми на усе більш прості складові і в подальшому обробленні послідовності суджень особи, що приймає рішення (ЛПР), за парними порівняннями. У результаті може бути отриманий відносний ступінь (інтенсивність) взаємодії (впливу) компонентів нижнього і-го рівня на компоненти верхнього (і-1)-го рівня або і-го рівня на найвищий (нульовий) рівень. Ці оцінки виражаються потім у числових значеннях. МАІ об’єднує процедури синтезу множинних суджень, одержання пріоритетності критеріїв і пошуку альтернативних рішень.

Теорія систем створила концептуальну основу для побудови нової методології, що дозволяє описувати систему і її проблеми в термінах взаємозалежної ієрархічної структури. Ця методологія пропонує засоби для упорядкування пріоритетів і виміру інтенсивності взаємодії компонентів, що описують структуру системи ієрархії. Методологія враховує роль людини (як елемента ієрархії) у складних соціальних і організаційних системах і урівноважує численні і суперечливі прагнення, що мають люди, чиї інтереси торкаються функціонування системи.

Метод аналізу ієрархій містить такі основні етапи:

– декомпозиція проблеми;
– побудова ієрархічної структури моделі проблеми;
– експертне оцінювання переваг;
– побудова локальних пріоритетів;
– оцінка погодженості суджень;
– синтез локальних пріоритетів;
– висновки й пропозиції для прийняття рішень.

Шкала Т. Сааті

Метод аналізу ієрархій під час побудови єдиної шкали для різних компонентів проблеми використовує величину ступеня впливу кожного фактора одного рівня на фактори верхнього рівня або на кінцеву мету. Ця величина утвориться в результаті висловлення суджень про ступінь впливу (важливості) цих факторів. Американський фахівець із системного аналізу Т. Сааті запропонував шкалу відносної важливості (значущості, переваги) подану в таблиці 14.

Таблиця 14 – Шкала відносної важливості

Ступінь переваги одного об'єкта над іншим	Міра важливості (значущості) переваги
Рівноцінна важливість (значущості) Немає переваги	1
Слабка перевага за важливістю Слабка перевага	3
Істотна або значна перевага за важливістю (значущістю). Велика перевага	5
Дуже велика або значна перевага за важливістю (значущістю) Дуже велика перевага	7
Абсолютна перевага	9
Проміжна оцінка ступені переваги між сусідніми значеннями	2, 4, 6, 8

Вибір дискретної шкали “1 – 9” для оцінки порівняльної міри важливості (значущості або рівня переваг), отримуваної в результаті висловлення суджень експертом, ґрунтується на таких передумовах:

1. Якісні розходження значущі на практиці і мають елемент точності, коли величина порівнюваних об'єктів (предметів, явищ, процесів, видів діяльності) одного порядку або самі об'єкти близькі щодо властивості, за якою вони порівнюються.

2. Психометричні властивості людини дозволяють проводити якісні розмежування мір властивостей порівнюваних об'єктів за такими рівнями: *немає розходження, слабке розходження, велике розходження, дуже велике розходження, абсолютне розходження*. З огляду на компромісні оцінки розходження між перерахованими вище рівнями значущості (важливості), отримуємо дев'ять рівнів (ступенів) розходження, що можуть бути якісно погоджені.

3. У психології існує поняття психологічної межі здатності людини одночасно розрізняти якесь число предметів за якоюсь властивістю. Ця межа дорівнює 7±2, тобто для створення шкали, на якій ці предмети будуть розбірливими, необхідно 9 точок. З огляду на вище зазначене, шкалу Сааті іноді називають психометричною шкалою.

Метод парних порівнянь

Для побудови шкали пріоритетів (переваг), одержуваної при експертному висловленні суджень про рівень розходження між порівнюваними об'єктами в МАІ, застосовується метод парних порівнянь. Якщо для порівняння обране n (A_1, A_2,…,A_n) об'єктів, то результати порівнянь заносяться в квадратну n-мірну матрицю такого вигляду (табл. 15):

Таблиця 15 – Матриця парних порівнянь

	A_1	A_2	…	A_j	…	A_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
A_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…	…
A_n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nj}	…	a_{nn}

Елементом цієї матриці a_{ij} є міра переваги об'єкта A_i у порівнянні з об'єктом A_j. Таким чином, і-й рядок матриці показує міру переваги і-го об'єкта над іншими (n-1) об'єктами і над самим собою. Міра переваги виражається експертом у шкалі Сааті і набуває значень від 1 до 9, якщо об'єкт A_i більш важливий, ніж об'єкт A_j. У випадку, коли i=j, міра переваги дорівнює 1, тобто діагональні елементи матриці парних порівнянь завжди дорівнюють 1. Варто враховувати, що для матриці парних порівнянь виконується така умова:

$$a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$$

Це означає, що якщо за шкалою Сааті об'єкт A_i більш важливий, ніж об'єкт A_j, і ця міра переваги дорівнює a_{ij} (наприклад $a_{ij} = 5$), то міра переваги A_j-го об'єкта в порівнянні з об'єктом A_i – величина зворотна a_{ij} (тобто $a_{ji} = 1/5$). Таким чином, експертом заповнюється тільки верхня наддіоганальна частина матриці парних порівнянь, і матриця набуває такого вигляду (наприклад, для чотирьох порівнюваних об'єктів) (табл. 16):

Таблиця 16 – Матриця парних порівнянь для чотирьох об'єктів

	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	1	a_{12}	a_{13}	a_{14}
A_2	$1/a_{12}$	1	a_{23}	a_{24}
A_3	$1/a_{13}$	$1/a_{23}$	1	a_{34}
A_4	$1/a_{14}$	$1/a_{24}$	$1/a_{34}$	1

Міра погодженості

У загальному випадку під погодженістю мається на увазі те, що за наявності основного масиву неопрацьованих даних усі інші дані можуть бути отримані з них. Якщо порівнюються n об'єктів, то досить (n-1) судження, у яких порівнювані об'єкти подані, принаймні, один раз. Усі інші судження (у випадку їхньої погодженості) можуть бути виведені з них.

Повна погодженість містить як *порядкову погодженість*, що називають ще властивістю *транзитивності* (якщо A_i має перевагу над A_j, а A_j має перевагу над A_k, то A_i має перевагу над A_k), так і *кардинальну погодженість* ($a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$).

Очевидно, що домогтися повної погодженості матриці парних порівнянь при експертних оцінках об'єктів неможливо. Зазвичай після експертних оцінок за методом парних порівнянь порушується питання про ступінь погодженості отриманих оцінок.

Як міру погодженості розглядають два показники:

– індекс погодженості (ІП);
– відношення погодженості (ВП).

За теорією матриць, погодженість зворотно симетричної матриці (як результат застосування експертом методу парних порівнянь за шкалою Сааті) еквівалентна вимозі рівності її максимального власного значення λ_{max} і числа порівнюваних об'єктів n ($\lambda_{max} = n$).

Тому як міру неузгодженості розглядають нормоване відхилення λ_{max} від n, яке називається *індексом погодженості*:

$$ІП = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1},$$

Для того щоб оцінити, чи є отримане узгодження прийнятним, його порівнюють із випадковим індексом (ВІ).

Випадковим індексом називають індекс погодженості, розрахований для квадратної n-мірної позитивної зворотно симетричної матриці, елементи якої генеровані датчиком випадкових чисел, розподілених за рівномірним законом для інтервалу значень: 1/9, 1/8, 1/7, 1/6, 1/5, 1/4, 1/3, 1/2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Для матриці з фіксованим значенням n індекс розраховується як середнє значення для вибірки N (наприклад, N = 100). Нижче на табл. 17 подані величини випадкового індексу для різних матриць порядку від 2 до 15.

Таблиця 17 – Величини випадкового індексу

Порядок матриці (n×n)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Випадко-вий індекс (ВІ)	0	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49	1,51	1,54	1,56	1,57	1,59

Отримавши в результаті розрахунку індекс погодженості і вибравши з таблиці випадковий індекс для заданого порядку матриці, розраховують *відношення погодженості (ВП):*

$$ВП = \frac{ІП}{ВІ}.$$

Якщо величина ВП менше 0,1, то ступінь погодженості вважається хорошим. У деяких випадках прийнятним ступенем погодженості можна вважати діапазон від 0,1 до 0,3. Це, як правило, стосується проблем, для яких прийняті за експертними висновками рішення не спричиняють серйозних негативних наслідків. В іншому випадку, якщо ОС > 0,1 – 0.3, експерту рекомендується переглянути свої твердження. Для цього необхідно виявити ті позиції в матриці суджень, що роблять максимальний внесок у величину відносин погодженості, і спробувати змінити міру непогодженості в меншу сторону на основі більш глибокого аналізу питання.

Вектор пріоритетів

Проведемо математичне обчислення матриці парних порівнянь за шкалою Сааті з метою отримання вектора пріоритетів порівнюваних об'єктів. З математичної точки зору задача зводиться до обчислення головного власного вектора, що після нормалізації стає вектором пріоритетів.

Точний спосіб обчислення головного власного вектора матриці парних порівнянь полягає в зведенні матриці в достатньо великі степені і поділі суми кожного рядка на загальну суму елементів матриці. Ми скористаємося іншим, більш простим способом, що дає хороше наближення (табл. 18):

Таблиця 18 – Головний власний вектор і вектор пріоритетів

	A_1	A_2	…	A_n	Головний власний вектор	Вектор пріоритетів
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	V_1	P_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	V_2	P_2
…	…	…	…	…	…	…
A_n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nn}	V_n	P_n

Компонента головного власного вектора обчислюється як середнє геометричне значень у рядку матриці:

$$V_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}}\ .$$

Компонента вектора пріоритетів обчислюється як нормоване значення головного власного вектора:

$$P_i = \frac{V_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i}\ .$$

Наближені значення λ_{max} для оцінки відносини погодженості можна розрахувати за такою формулою:

$$\lambda_{max} = \sum_{j=1}^{n} M_j P_j,$$

де $M_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ – сума елементів i-го стовпця матриці;

P_j – вектор пріоритетів аналізованої матриці.

Приклад побудови вектора пріоритетів

Нехай існує проблема купівлі будинку. Визначено такі фактори, що впливають на вирішення цієї проблеми: розміри будинку, зручність сполучення, околиці, вік будинку, двір, упорядкування, загальний стан, фінансові умови купівлі. Необхідно побудувати вектор пріоритетів цих факторів. Нижче надана матриця парних порівнянь для розглянутих восьми факторів, заповнена міркуваннями експерта за шкалою Сааті, на основі яких і проведені відповідні обчислення (табл. 19):

Таблиця 19 – Матриця парних порівнянь для восьми факторів

Загальне задоволення будинком	Розміри будинку	Зручність сполучення	Околиці	Вік будинку	Двір	Упорядкування	Загальний стан	Фінансові умови купівлі	Головний власний вектор	Вектор пріоритетів
Розміри будинку	1	5	3	7	6	6	1/3	1/4	2.053	0.175
Зручність сполучення	1/5	1	1/3	5	3	3	1/5	1/7	0.736	0.063
Околиці	1/3	3	1	6	3	4	6	1/5	1.746	0.149
Вік будинку	1/7	1/5	1/6	1	1/3	1/4	1/7	1/8	0.227	0.019
Двір	1/6	1/3	1/3	3	1	1/2	1/5	1/6	0.418	0.036
Упорядкування	1/6	1/3	1/4	4	2	1	1/5	1/6	0.497	0.042
Загальний стан	3	5	1/6	7	5	5	1	1/2	1.961	0.167
Фінансові умови купівлі	4	7	5	8	6	6	2	1	4.105	0.350
Сума елементів стовпця	9.010	21.867	10.250	41.000	26.333	25.750	10.076	2.551	11.742	1.000

λ_{max} = 9.863, ІП = 0.266, ВІ = 1.410 (визначаємо за таблицею), ВП = 0.189.

Слід зазначити, що відношення погодженості такої матриці трохи більше за рекомендований рівень (ВП > 0,1), однак, для задач такого типу його можна прийняти.

У загальному випадку рівень погодженості повинен відповідати тому ризику, що супроводжує роботу з неузгодженими даними.

Наприклад, при порівнянні впливу ліків на організм необхідно мати дуже високий рівень погодженості.

Порядок виконання роботи

1. Визначити з таблиці проблему і список критеріїв для свого варіанта. Номер проблеми визначає значення m. Для визначення списку критеріїв необхідно з вихідного списку, зазначеного в таблиці для даної проблеми викреслити критерій зі значенням k.
m – остання цифра в номері залікової книжки; k – передостання цифра в номері залікової книжки.

Якщо остання цифра в номері залікової книжки дорівнює нулю, то m = 9, якщо передостання цифра в номері залікової книжки дорівнює нулю, то k = 1 (табл. 20):

Таблиця 20 – Проблеми і список критеріїв

m	**Проблема;** варіанти її вирішення (множина альтернатив)	**Список критеріїв**
1	**Купівля автомобіля,** варіанти: 1) престижна іномарка; 2) економічний малолітражний автомобіль; 3) порівняно новий автомобіль підвищеної прохідності	1) місткість, 2) потужність двигуна, 3) комфорт, 4) забезпеченість запчастинами, 5) ціна, 6) рік випуску, 7) надійність, 8) економічність, 9) дизайн
2	**Вибір вимірювального приладу;** варіанти: 1) цифровий малогабаритний; 2) високоточний стрілочний; 3) багатофункціональний з виходом на ЕОМ	1) Вартість; 2) рівень автоматизації; 3) продуктивність (час на один вимір); 4) точність; 5) діапазон вимірів; 6) універсальність; 7) габарити; 8) надійність; 9) зручність експлуатації

m	**Проблема;** варіанти її вирішення (множина альтернатив)	Список критеріїв
3	**Оцінка якості промислової продукції;** варіанти: 1) вітчизняна; 2) західноєвропейська; 3) японська	1) Функціональні (споживчі) характеристики; 2) особиста безпека; 3) економічність; 4) надійність; 5) вартість; 6) дизайн; 7) зручність експлуатації; 8) довговічність; 9) забезпеченість запчастинами
4	**Вибір місця роботи;** варіанти: 1) приватна фірма; 2) державне підприємство; 3) навчальний інститут	1) Оклад; 2) самостійність; 3) професійний інтерес; 4) можливості одержання житлоплощі; 5) додаткові навантаження; 6) додаткові вигоди; 7) необхідність перенавчання; 8) далекість від будинку; 9) психологічний клімат
5	**Призначення на посаду;** варіанти: 1) молодий фахівець; 2) досвідчений працівник середнього віку; 3) колишній офіцер, що пройшов перепідготовку	1) Ділова кваліфікація; 2) досвід роботи; 3) стать; 4) вік; 5) почуття відповідальності; 6) освіта; 7) місце проживання кандидата; 8) організаторські здібності; 9) психологічна сумісність
6	**Упровадження нового технологічного методу (устаткування);** варіанти: 1) дуже нова закордонна розробка; 2) остання вітчизняна розробка; 3) апробована вітчизняна розробка	1) Вартість; 2) безпека; 3) ступінь автоматизації; 4) продуктивність; 5) експлуатаційні витрати; 6) універсальність; 7) надійність; 8) технологічна сумісність; 9) забезпеченість сировиною
7	**Вибір виду транспорту для поїздки;** варіанти: 1) літак; 2) потяг; 3) автобус	1) Вартість квитка; 2) надійність; 3) комфортабельність; 4) час у дорозі; 5) безпека; 6) труднощі придбання квитка; 7) зручність розкладу; 8) індивідуальна пристосованість; 9) припустима вага багажу без додаткової оплати

m	**Проблема;** варіанти її вирішення (множина альтернатив)	**Список критеріїв**
8	**Вибір принтера для персонального комп'ютера;** варіанти: 1) матричний; 2) струменевий; 3) лазерний	1) Вартість; 2) якість друку; 3) швидкість друку; 4) додаткові можливості (графіка, колір); 5) простота й зручність обслуговування; 6) наявність українських букв; 7) надійність; 8) кількість шрифтів; 9) забезпеченість запчастинами
9	**Оцінка якості життя;** варіанти: 1) великий промисловий центр; 2) провінційне мале місто; 3) передмістя столичного міста	1) Суспільна безпека; 2) стан навколишнього середовища; 3) можливості для дозвілля й розваг; 4) можливості підвищення кваліфікації й одержання роботи; 5) медичне обслуговування; 6) вартість життя; 7) житлові умови; 8) рівень доходів; 9) ритм життя

2. Побудувати матрицю парних порівнянь для розглянутих восьми факторів, заповнивши її експертними оцінками по шкалі Сааті.

3. Обчислити головний власний вектор, вектор пріоритетів, λ_{max}, ІП, ВП. Якщо значення ВП буде більше 0,3, скорегувати експертні оцінки.

Контрольні запитання.

1. Матриця Сааті.
2. Метод парних порівнянь. Матриця парних порівнянь.
3. Повна погодженість.
4. Порядкова погодженість.
5. Кардинальна погодженість.
6. Умова погодженості зворотно симетричної матриці.
7. Індекс погодженості.
8. Випадковий індекс.
9. Відношення погодженості.
10. Діапазон гарного ступеня погодженості.
11. Діапазон прийнятного ступеня погодженості.
12. Точний спосіб обчислення головного власного вектора матриці парних порівнянь.
13. Наближений спосіб обчислення головного власного вектора матриці парних порівнянь.
14. Визначення наближених значень компонент вектора пріоритетів.
15. Визначення наближеного значення λ_{max} .

Задача № 3

Метод аналізу ієрархій. Розрахунок локальних пріоритетів. Синтез пріоритетів

Розглянемо проблему: «Вибір і покупка будинку *із заданим рівнем якості* або покупка такого будинку, який би викликав *загальне задоволення*».

Як альтернативні варіанти розглядаємо три будинки (А, Б, В) із такими характеристиками: будинок А – найбільший будинок (із трьох), гарні околиці, інтенсивний рух транспорту, податки на будинок невеликі. Двір більший, ніж у будинків Б і В. Загальний стан не дуже хороший, потрібне ґрунтовне полагодження й проведення малярських робіт. Будинок фінансується банком із високою процентною ставкою, тому фінансові умови можна вважати незадовільними.

Будинок Б – трохи менше будинку А, розташований далеко від автобусних зупинок. Навколо інтенсивний рух транспорту. У будинку відсутні сучасні зручності, але загальний стан будинку дуже хороший. Крім того, на будинок можна отримати заставну з досить низькою процентною ставкою, тобто фінансові умови цілком задовільні.

Будинок В – маленький і без сучасних зручностей. Околиці досить привабливі, але податки високі, однак будинок у хорошому стані і досить безпечний. Двір більший, ніж біля будинку Б, однак значно менший, ніж убіля будинку А. Обсяг відновлювально-ремонтних робіт дуже малий. Фінансові умови набагато кращі, ніж для будинку А, але не такі хороші, як для будинку Б.

Ієрархічна модель розв’язання проблеми для розглянутого прикладу має вигляд, поданий на рис. 7:

Для того щоб прийняти обґрунтоване рішення про вибір будинку, необхідно, зробити таке.

Після побудови ієрархічної моделі проблеми починаємо перший етап аналізу, що складається з дослідження ступеня впливу показників властивостей якості будинку на загальне задоволення будинком. У формальному вигляді цей етап є аналізом впливу факторів першого рівня ієрархії на мету аналізу – нульовий рівень. Цей етап був виконаний у попередній лабораторній роботі. Була зображена матриця парних порівнянь для восьми факторів 1-го рівня та заповнена міркуваннями експерта за шкалою Сааті. На підставі цих даних були визначені вектор пріоритетів, λ_{max}, ІП та ВП.

На другому етапі переходимо до розгляду впливу факторів другого рівня на фактори першого рівня, тобто до аналізу «ваги» (переваг) кожного з розглянутих будинків А, Б, В відносно кожного фактора першого рівня. Для цього необхідно сформувати й обробити вісім експертних матриць парного порівняння. Самі матриці й результати їхнього оброблення у вигляді векторів пріоритетів і мір узгодженості подані в таблиці 21.

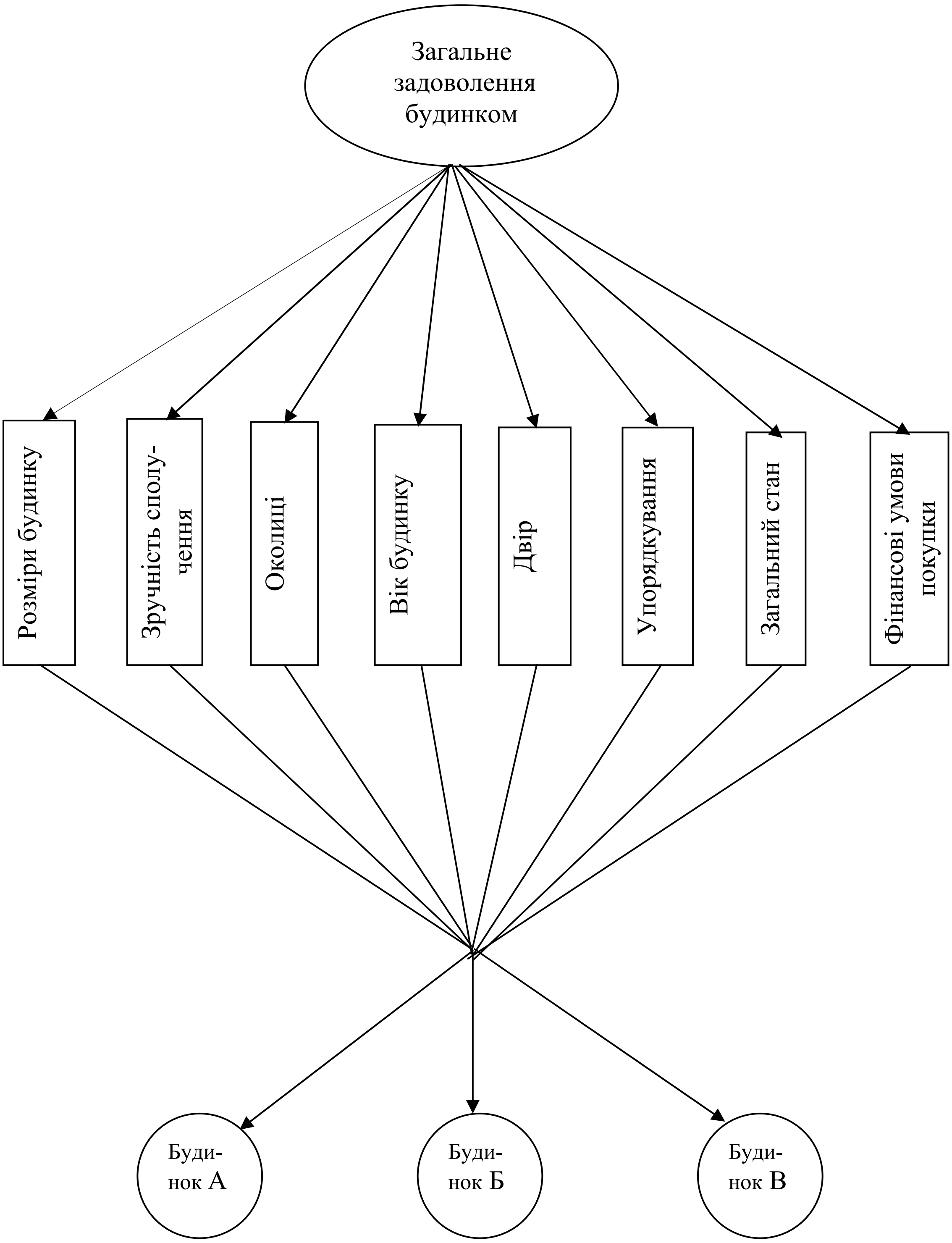

Рис. 7 – Ієрархічна модель розв’язання проблеми: вибір і купівля будинку

Таблиця 21 – Експертні матриці парного порівняння

Розміри будинку	А	Б	В	Вектор пріоритетів	Зручність сполучення	А	Б	В	Вектор пріоритетів
А	1	6	8	0.754	А	1	5	4	0.233
Б	1/6	1	4	0.181	Б	1/5	1	1/3	0.054
В	1/8	1/4	1	0.065	В	1/4	3	1	0.712
–	–	–	–	λ_{max} = 3.136 ІП = 0.068 ВП = 0.117	–	–	–	–	λ_{max} = 3.247 ІП = 0.123 ВП = 0.213
Околиці	А	Б	В	Вектор пріоритетів	Вік будинку	А	Б	В	Вектор пріоритетів
А	1	8	6	0.754	А	1	1	1	0.333
Б	1/8	1	1/4	0.065	Б	1	1	1	0.333
В	1/6	4	1	0.181	В	1	1	1	0.333
–	–	–	–	λ_{max} = 3.136 ІП = 0.068 ВП = 0.117	–	–	–	–	λ_{max} = 3.000 ІП = 0.000 ВП = 0.000
Двір	А	Б	В	Вектор пріоритетів	Упорядженість	А	Б	В	Вектор пріоритетів
А	1	5	4	0.674	А	1	8	6	0.747
Б	1/5	1	1/3	0.101	Б	1/8	1	1/5	0.060
В	1/4	3	1	0.226	В	1/6	5	1	0.193
–	–	–	–	λ_{max} = 3.086 ІП = 0.043 ВП = 0.074	–	–	–	–	λ_{max} = 3.197 ІП = 0.099 ВП = 0.170
Загальний стан	А	Б	В	Вектор пріоритетів	Фінансові умови покупки	А	Б	В	Вектор пріоритетів
А	1	1/2	1/2	0.200	А	1	1/7	1/5	0.072
Б	2	1	1	0.400	Б	7	1	3	0.649
В	2	1	1	0.400	В	5	1/3	1	0.279
–	–	–	–	λ_{max} = 3.000 ІП = 0.000 ВП = 0.000	–	–	–	–	λ_{max} = 3.065 ІП = 0.032 ВП = 0.056

Аналіз векторів локальних пріоритетів показує, що будинок А кращий за чотирма критеріями (розмір будинку, околиці, двір і упорядкування), будинок Б кращий за фінансовими умовами, а будинок В кращий за зручністю сполучення.

На третьому етапі здійснюється синтез локальних пріоритетів або оцінка узагальнених (глобальних) пріоритетів. У нашому прикладі мова йде про одержання вектора глобальних пріоритетів будинків А, Б, В стосовно мети вищого рівня – загального задоволення будинком.

Для цього матрицю локальних пріоритетів 2-го рівня (табл. 22), складену за результатами аналізу, поданого в наведеній вище таблиці 21, множать на вектор локальних пріоритетів 1-го рівня (контрольна робота № 2).

Таблиця 22 – Матриця локальних пріоритетів 2-го рівня

Будинок	Розміри будинку	Зручність сполучення	Околиці	Вік будинку	Двір	Упорядкування	Загальний стан	Фінансові умови купівлі
А	0.754	0.233	0.754	0.333	0.674	0.747	0.200	0.072
Б	0.181	0.054	0.065	0.333	0.101	0.060	0.400	0.649
В	0.065	0.712	0.181	0.333	0.226	0.193	0.400	0.279

Таблиця 23 – Вектор локальних пріоритетів 1-го рівня

Розміри будинку	0.175
Зручність сполучення	0.063
Околиці	0.149
Вік будинку	0.019
Двір	0.036
Упорядкування	0.042
Загальний стан	0.167
Фінансові умови купівлі	0.350

У результаті отримуємо узагальнений (глобальний) вектор пріоритетів будинків А, Б, В відносно кінцевої мети – покупки будинку. Цей вектор має такий вигляд (табл. 24):

Таблиця 24 – Глобальний вектор пріоритетів

Будинок	Вектор пріоритетів
А	0.379
Б	0.351
В	0.270

Таким чином, враховуючи усі розглянуті фактори, перевага під час купівлі надається будинку А.

Порядок виконання роботи

1. Для проблеми, обраної в задачі № 2, виписати з таблиці, наведеної в цій роботі, варіанти її розв’язку.
2. Заповнити вісім експертних матриць парного порівняння.
3. Для кожної матриці обчислити головний власний вектор, вектор пріоритетів, λ_{max}, ІП, ВП.

4. Побудувати матрицю локальних пріоритетів 2-го рівня.
5. Використовуючи вектор локальних пріоритетів 1-го рівня, отриманий у задачі № 2, і матрицю локальних пріоритетів 2-го рівня, отриману в даній роботі, обчислити узагальнений (глобальний) вектор пріоритетів стосовно кінцевої мети.
6. Прийняти рішення за проблемою.

Контрольні запитання

1. Три етапи прийняття обґрунтованого рішення проблеми.
2. Як побудувати матрицю локальних пріоритетів 2-го рівня?
3. Як побудувати вектор глобальних пріоритетів?

Задача № 4

Методи пошуку й вибору рішень. Мінімаксний критерій. Критерій Байєса – Лапласа. Критерій Севіджа

Задача прийняття рішення трактується як задача вибору одного варіанта E_i з деякої множини варіантів рішень $E_i \in E$. Будемо розглядати випадок, коли визначене лише кінцеве число варіантів $E_1, E_2, ..., E_i, ..., E_m$. Умовимося, що кожним варіантом E_i визначається деякий результат e_i. Ці результати повинні допускати кількісну оцінку, яку також будемо позначати символом e_i. Будемо шукати варіант із максимальним результатом, тобто метою нашого вибору є $\max_i e_i$. Результати e_i найчастіше характеризуються, як виграші корисності або надійності. Таким чином, вибір оптимального варіанта рішення виробляється за допомогою критерію

$$E_0 = \left\{ E_{i0} \,/\, E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i e_i \right\}. \qquad (5)$$

Правило (5) інтерпретується в такий спосіб: множина E_0 оптимальних варіантів складається з тих варіантів E_{i0}, що належать множині E усіх варіантів, і оцінка e_{i0} максимальна серед усіх оцінок e_i.

Розглянутий випадок прийняття рішень, при якому кожному варіанту рішення відповідає єдиний зовнішній стан (єдиний результат), є випадком детермінованих рішень. Цей випадок є найпростішим і частковим. У більш складних структурах кожному варіанту рішення E_i внаслідок різних зовнішніх умов F_j можуть відповідати різні результати e_{ij} рішень.

Під результатом рішення e_{ij} будемо мати на увазі оцінку, що відповідає варіанту E_i й умовам F_j, яка характеризує економічний ефект (прибуток), корисність або надійність виробу. Множина рішень описується деякою матрицею:

$$
\begin{array}{c} \\ E_1 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_m \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} F_1 & \cdots & F_j & \cdots & F_n \end{array} \\
\begin{pmatrix}
e_{11} & \cdots & e_{1j} & \cdots & e_{1n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
e_{i1} & \cdots & e_{ij} & \cdots & e_{in} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
e_{m1} & \cdots & e_{mj} & \cdots & e_{mn}
\end{pmatrix}
\end{array}. \qquad (6)
$$

Особа, що приймає рішення (ОПР), намагається вибрати рішення з найкращими результатами. У цьому випадку, первісна задача максимізації відповідно до критерію (5) повинна бути замінена іншою, котра буде враховувати всі наслідки кожного з варіантів рішення E_i.

Щоб знайти однозначний і найвигідніший варіант розв'язку, коли якимнебудь варіантам рішень можуть відповідати різні умови, можна ввести необхідні оцінні (цільові) функції. При цьому матриця (6) зводиться до одного стовпця:

$$
\begin{array}{c} \\ E_1 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_m \end{array}
\begin{array}{c}
F_r \\
\begin{pmatrix}
e_{1r} \\ \vdots \\ e_{ir} \\ \vdots \\ e_{mr}
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

Кожному варіанту надається, таким чином, деякий результат, що характеризує, у цілому, всі наслідки цього розв'язку. Такий результат ми будемо надалі позначати символом e_{ir}.

Процедура вибору оптимального розв'язку зводиться до проблеми вкладення змісту в результат e_{ir}. З погляду ОПР, найчастіше бажаний результат формується між оптимістичними й песимістичними способами побудови оцінних функцій.

Розглянемо оцінні функції, що може обрати ОПР.

1) Оптимістична позиція ОПР:

$$\max_i e_{ir} = \max_i(\max_j e_{ij}). \qquad (7)$$

Точка зору азартного гравця. ОПР припускає, що цей випадок буде найвигіднішим.

2) Позиція нейтралітету:

$$\max_i e_{ir} = \max_i\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e_{ij}\right). \qquad (8)$$

ОПР передбачає, що усі відхилення результату від «середнього» випадку припустимі, і обирає розв'язки, оптимальні щодо цього твердження.

3) Песимістична позиція ОПР:

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left(\min_j e_{ij} \right). \qquad (9)$$

ОПР твердить, що треба орієнтуватися на найменш сприятливий результат і припускає, що у кожному з альтернативних варіантів буде найгірший з можливих результатів. Після цього він обирає найвигідніший варіант, тобто очікує найкращого результату в найгіршому випадку.

4) Позиція відносного песимізму ОПР:

$$\min_i e_{ir} = \min_i \max_j \left(\max_i e_{ij} - e_{ij} \right). \qquad (10)$$

Для кожного варіанта рішення ОПР оцінює втрати щодо результату в порівнянні з визначеним за кожним варіантом найкращим результатом, а потім із сукупності найгірших результатів ОПР обирає найкращий відповідно до надоної оцінної функції.

Ряд таких оцінних функцій можна було б продовжити. Деякі з них були широко розповсюджені в господарській діяльності. Так, якщо умови експлуатації заздалегідь не відомі, орієнтуються звичайно на найменш сприятливу ситуацію. Це відповідає оцінної функції (9). Найчастіше використовуються функції (8) і (10). Оцінна функція (7) у технічних додатках ще не застосовувалася.

Класичні критерії прийняття рішень

Мінімаксний критерій (ММ) використовує оцінну функцію (9), що відповідає позиції крайньої обережності, тобто

$$z_{MM} = \max_i \min_j e_{ij}, \qquad (11)$$

де z_{MM} – оцінна функція ММ-критерію і справедливе таке співвідношення: $\mathrm{E}_0 = \left\{ \mathrm{E}_{i0} / \mathrm{E}_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_i \min_j e_{ij} \right\}$.

Обрані варіанти цілком виключають ризик. Це означає, що ОПР не може зіштовхнутися з гіршим результатом, ніж той, на який вона орієнтується. Які б умови F_j не зустрілися, результат не може виявитися нижчим z_{MM}. Ця властивість змушує вважати мінімаксний критерій одним із фундаментальних. Тому в технічних задачах він застосовується найчастіше як свідомо, так і неусвідомлено. Однак, положення про відсутність ризику коштує різних втрат.

Нехай матриця рішень представлена у виді

$$\begin{array}{ccc} & F_1 & F_2 \\ E_1 & 1 & 100 \\ E_2 & 1{,}1 & 1{,}1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & F_r \\ E_1 & 1 \\ E_2 & 1{,}1 \end{array}, \qquad z_{MM} = 1{,}1.$$

Хоча варіант E_1 здається більш вигідним, відповідно до ММ-критерію (11) оптимальним варто вважати $E_0 = \{E_2\}$. Ухвалення рішення за цим критерієм може виявитися недоцільним, якщо стан F_2 зустрічається частіше, ніж стан F_1 і розв'язання використовуються багаторазово.

Обираючи варіант E_2, що пропонується ММ-критерієм, ми уникаємо невдалого результату 1, що використовується у варіанті E_1 при зовнішньому стані F_1, зате втрачаємо виграш 100, отримуючи усього тільки 1,1.

Цей приклад підтверджує, що в багатьох практичних ситуаціях песимізм ММ-критерію може виявитися дуже невигідним. Тому застосування ММ-критерію виправдовується, якщо ситуація, за якої приймається рішення, характеризується такими обставинами:
– про можливості появи зовнішніх станів F_j нічого не відомо;
– розв’язання реалізується лише один раз;
– необхідно вилучити будь-який ризик, тобто ні за яких умов F_j не допускається отримання результату, меншого ніж z_{MM}.

Критерій Байєса- Лапласа (BL-критерій).

Нехай p_j – імовірність появи зовнішнього стану F_j, тоді для BL-критерію оцінна функція має такий вигляд:

$$z_{BL} = \max_i e_{ir} = \max_i \sum_{j=1}^{n} e_{ij} p_j \ , \qquad (12)$$

$$E_0 = \left\{ E_{i0} / E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i \sum_{j=1}^{n} e_{ij} p_j \wedge \sum_{j=1}^{n} p_j = 1 \right\}.$$

Правило вибору можна інтерпретувати в такий спосіб: матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється ще одним стовпцем, що містить математичне очікування значень кожного з рядків. Обираються ті варіанти E_{i0}, у рядках яких є найбільше значення e_{ir} цього стовпця .

Умови, за яких використовується цей критерій:
– імовірності появи станів F_j відомі і не залежать від часу;
– рішення реалізується (теоретично) нескінченно багато разів;
– для кінцевого числа реалізацій рішення допускається деякий ризик.

Критерій Севіджа (S-критерій).

Сформуємо оцінну функцію. Нехай

$$a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij} \qquad (13)$$

і $$e_{ir} = \max_j a_{ij} = \max_j \left(\max_i e_{ij} - e_{ij} \right), \qquad (14)$$

тоді оцінна функція має такий вигляд

$$z_S = \min_i e_{ir} = \min_i \left(\max_j \left(\max_i e_{ij} - e_{ij} \right) \right). \qquad (15)$$

Множина оптимальних варіантів розв’язання така:

$$E_0 = \left\{ E_{i0} \,\middle|\, E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \min_i e_{ir} \right\}.$$

Величину $a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij}$ можна інтерпретувати подвійно:

– як максимальний додатковий виграш, що досягається, якщо в стані F_j замість варіанта E_i вибрати інший, оптимальний для цього зовнішнього стану варіант;

– як утрати (штрафи), що виникають у стані F_j при заміні оптимального для нього варіанта на варіант E_i.

Тоді величина e_{ir} є (при інтерпретації a_{ij} як утрати) максимально можливі (за всіх зовнішніх станів $F_j, j = 1,...,n$) втрати у випадку вибору варіанта E_i. Далі максимально можливі втрати мінімізуються за рахунок вибору підходящого варіанта E_i.

Правило вибору оптимального варіанта за критерієм Севіджа:

– кожен елемент матриці рішень $\|e_{ij}\|$ віднімається від найбільшого результату $\max_i e_{ij}$ відповідного стовпця. Різниці a_{ij} утворять матрицю залишків $\|a_{ij}\|$. Ця матриця доповнюється стовпцем найбільших різниць e_{ir};

– вибираються ті варіанти E_{i0}, у рядках яких є найменше для цього стовпця значення.

Умови застосування S-критерію такі ж, як для ММ-критерію.

Приклад

Дано матрицю рішень $\| e_{ij} \|$ розміром $m \times n$, $m = 8$, $n = 8$, результатом якої є збитки. Здійснити вибір оптимальнішого варіанта рішення за допомогою таких критеріїв: мінімаксного, Байєса-Лапласа і Севіджа. Відомо, що імовірності появи зовнішніх станів F_j, $j = 1,...,8$ мають такі значення: $p_1 = 0{,}3,\ p_2 = \ldots = 0{,}1$.

$$\| e_{ij} \| = \left\| \begin{array}{cccccccc} -5{,}1 & -7{,}5 & -2{,}4 & -7{,}1 & -8{,}17 & -6{,}2 & -3{,}85 & -6{,}4 \\ -5{,}7 & -5{,}06 & -6{,}3 & -7{,}9 & -8{,}0 & -5{,}1 & -4{,}8 & -6{,}22 \\ -8{,}5 & -5{,}72 & -6{,}18 & -3{,}1 & -1{,}2 & -5{,}5 & -7{,}2 & -3{,}16 \\ -7{,}51 & -6{,}15 & -4{,}2 & -1{,}58 & -7{,}7 & -6{,}2 & 9{,}11 & -4{,}18 \\ -4{,}8 & -6{,}12 & -6{,}0 & -8{,}2 & -5{,}13 & -7{,}14 & -9{,}02 & -5{,}17 \\ -3{,}11 & -5{,}46 & -6{,}2 & -7{,}3 & -3{,}11 & -9{,}26 & -7{,}0 & -6{,}0 \\ -5{,}17 & -3{,}26 & -5{,}4 & -4{,}8 & -6{,}8 & -5{,}3 & -6{,}12 & -5{,}3 \\ -2{,}1 & -6{,}83 & -5{,}2 & -5{,}7 & -6{,}11 & -8{,}5 & -5{,}4 & -6{,}81 \end{array} \right\|$$

Розв'язання. Спочатку будемо шукати оптимальний варіант розв'язання за допомогою ММ-критерію. Для цього матрицю рішень доповнимо стовпцем $e_{ir} = \min_j e_{ij}$ – найменших результатів кожного рядка, тобто

$$\left\| e_{ir} \right\| = \left\| \begin{array}{c} -8{,}17 \\ -8{,}0 \\ -8{,}5 \\ -9{,}11 \\ -9{,}02 \\ -9{,}26 \\ -6{,}8 \\ -8{,}5 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow E_7 \\ \\ \end{array}$$

Оберемо варіанти E_{i0}, у рядках яких є найбільше значення e_{ir} цього стовпця, тобто $Z_{MM} = \max\limits_i e_{ir} = -6{,}8$. Цей результат відповідає оптимальному варіанту $E_{i0} = \left\{ E_7 \right\}$.

Застосуємо критерій Байєса-Лапласа для пошуку оптимального варіанта. Знайдемо математичні очікування кожного рядка $\sum\limits_{j=1}^{n} e_{ij} p_j$ і запишемо їх у додатковий стовпець e_{ir}:

$$\left\| \begin{array}{l} -5{,}10 \times 0{,}3 - 0{,}1 \times (7{,}50 + 2{,}40 + 7{,}10 + 8{,}17 + 6{,}20 + 3{,}85 + 6{,}40) \\ -5{,}70 \times 0{,}3 - 0{,}1 \times (5{,}06 + 6{,}30 + 7{,}90 + 8{,}00 + 5{,}10 + 4{,}80 + 6{,}22) \\ -8{,}50 \times 0{,}3 - 0{,}1 \times (5{,}72 + 6{,}18 + 3{,}10 + 1{,}20 + 5{,}50 + 7{,}20 + 3{,}16) \\ -7{,}51 \times 0{,}3 - 0{,}1 \times (6{,}15 + 4{,}20 + 1{,}58 + 7{,}70 + 6{,}20 + 9{,}11 + 4{,}18) \\ -4{,}80 \times 0{,}3 - 0{,}1 \times (6{,}12 + 6{,}00 + 8{,}20 + 5{,}13 + 7{,}14 + 9{,}02 + 5{,}17) \\ -3{,}11 \times 0{,}3 - 0{,}1 \times (5{,}46 + 6{,}20 + 7{,}30 + 3{,}11 + 9{,}26 + 7{,}00 + 6{,}00) \\ -5{,}17 \times 0{,}3 - 0{,}1 \times (3{,}26 + 5{,}40 + 4{,}80 + 6{,}80 + 5{,}30 + 6{,}12 + 5{,}30) \\ -2{,}10 \times 0{,}3 - 0{,}1 \times (6{,}83 + 5{,}20 + 5{,}70 + 6{,}11 + 8{,}50 + 5{,}40 + 6{,}81) \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c} -5{,}692 \\ -6{,}048 \\ -5{,}756 \\ -6{,}165 \\ -6{,}118 \\ -5{,}366 \\ -5{,}249 \\ -5{,}085 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \\ \\ \\ = \left\| e_{ir} \right\| \\ \\ \\ \\ \leftarrow E_8 \end{array}$$

Застосуємо оцінну функцію (12) і знайдемо оптимальний варіант. Оскільки $Z_{BL} = \max\limits_i e_{ir} = -5{,}085$, то такий результат відповідає оптимальному варіанту $E_{i0} = \left\{ E_8 \right\}$.

Для використання критерію Севіджа побудуємо матрицю різниць $\left\| a_{ij} \right\|$ відповідно до формули (13):

$$\| a_{ij} \| = \left\| \begin{matrix} 3,00 & 4,24 & 0,00 & 5,52 & 6,97 & 1,10 & 0,00 & 3,24 \\ 3,60 & 1,80 & 3,90 & 6,32 & 6,80 & 0,00 & 0,95 & 3,06 \\ 6,40 & 2,46 & 3,78 & 1,52 & 0,00 & 0,40 & 3,35 & 0,00 \\ 5,41 & 2,89 & 1,80 & 0,00 & 6,50 & 1,10 & 5,26 & 1,02 \\ 2,70 & 2,86 & 3,60 & 6,62 & 3,93 & 2,04 & 5,17 & 2,01 \\ 1,01 & 2,20 & 3,80 & 5,72 & 1,91 & 4,16 & 3,15 & 2,84 \\ 3,07 & 0,00 & 3,00 & 3,22 & 5,60 & 0,20 & 2,27 & 2,14 \\ 0,00 & 3,57 & 2,80 & 4,12 & 4,91 & 3,40 & 1,55 & 3,65 \end{matrix} \right\|$$

Для цієї матриці побудуємо додатковий стовпець $e_{ir} = \max\limits_{j} a_{ij}$ відповідно до формули (14) і за допомогою оцінної функції $Z_S = \min\limits_{i} e_{ir} = 4,91$ знайдемо оптимальний варіант розв'язання $E_{i0} = \{ E_8 \}$.

$$\| e_{ir} \| = \left\| \begin{matrix} 6,97 \\ 6,80 \\ 6,40 \\ 6,50 \\ 6,62 \\ 5,72 \\ 5,60 \\ 4,91 \end{matrix} \right\| \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow E_8 \end{matrix}$$

Таким чином, використовуючи класичні критерії, ми отримали ряд оптимальних варіантів $E_{i0} = \{ E_7, E_8 \}$. Для вибору найкращого з них необхідні додаткові умови.

Порядок виконання роботи

Дано матрицю рішень розміром 8×8, результатами якої є або прибуток або збитки. Здійснити вибір оптимального варіанта рішення за допомогою критеріїв:

1) мінімаксного; 2) Байєса-Лапласа; 3) Севіджа.

Матриця рішень і розподіл ймовірностей появи зовнішніх станів обираються за номером утвореним двома останніми цифрами залікової книжки:

n – номер утворений двома останніми цифрами залікової книжки;

k – номер варіанта;

$$k = \begin{cases} n & 1 \le n \le 42 \\ n - 42 & 43 \le n \le 84 \\ n - 84 & 85 \le n \le 99 \end{cases}$$

Якщо дві останні цифри в номері залікової книжки дорівнюють нулю, то k = 42.

Варіанти матриці розв'язків знаходяться в таблиці 25. Імовірності p_j – появи зовнішніх станів F_j, j = 1,...,n подані в таблиці 26 за варіантами.

Таблиця 25 – Варіанти матриці рішень

Варіант 1

52	71	80	79	60	49	79	66
29	95	2	55	60	17	94	61
56	11	90	20	51	31	75	94
56	68	24	30	47	55	19	11
7	83	26	2	31	19	20	67
41	98	7	82	91	37	66	9
21	86	96	27	43	94	45	17
45	7	62	55	2	30	69	5

Варіант 2

-8	-53	-53	-33	-91	-89	-51	-34
-97	-75	-37	-16	-63	-77	-28	-28
-94	-90	-97	-19	-93	-75	-84	-85
-35	-35	-31	-37	-78	-95	-93	-34
-3	-11	-3	-59	-38	-81	-62	-42
-4	-96	-76	-1	-37	-67	-78	-75
-16	-73	-21	-70	-82	-75	-7	-91
-27	-16	-19	-87	-55	-79	-31	-85

Варіант 3

2	20	39	66	3	18	90	24
84	32	83	30	45	16	94	48
70	40	89	37	16	73	22	20
35	66	95	34	88	21	19	33
62	37	86	56	69	98	7	86
71	89	74	20	97	78	45	45
27	87	12	43	84	24	29	78
12	75	23	11	10	12	77	93

Варіант 4

-78	-60	-44	-74	-66	-79	-72	-91
-71	-42	-14	-12	-76	-70	-27	-53
-6	-57	-56	-69	-71	-45	-88	-17
-70	-95	-74	-3	-79	-90	-47	-63
-98	-2	-1	-26	-77	-20	-52	-90
-41	-17	-86	-90	-29	-20	-32	-83
-14	-33	-24	-32	-30	-62	-11	-5
-59	-67	-57	-19	-8	-50	-8	-58

Варіант 5

76	19	38	92	75	9	45	70
43	62	97	41	5	57	50	81
49	36	22	56	49	67	95	32
42	77	63	65	27	34	95	70
21	28	81	26	66	38	66	94
26	92	62	46	14	6	90	54
45	76	75	1	89	97	30	79
97	39	28	24	21	78	34	34

Варіант 6

-47	-98	-44	-15	-4	-92	-80	-39
-94	-25	-3	-74	-27	-3	-84	-85
-75	-50	-2	-13	-45	-57	-42	-40
-31	-78	-88	-40	-63	-37	-22	-74
-24	-97	-64	-5	-55	-23	-22	-43
-6	-22	-5	-2	-32	-72	-67	-72
-87	-60	-92	-3	-44	-5	-61	-48
-53	-68	-53	-26	-91	-44	-57	-54

Варіант 7

52	24	64	50	63	47	61	27
78	31	14	22	66	19	22	81
90	66	25	71	23	36	3	28
37	41	8	17	12	8	59	92
84	21	7	50	56	40	90	37
21	29	12	80	59	85	70	75
44	31	17	76	56	81	97	22
95	40	68	16	82	62	22	95

Варіант 8

-8	-24	-4	-39	-2	-36	-72	-20
-85	-61	-15	-85	-57	-38	-9	-3
-10	-74	-11	-13	-71	-20	-26	-58
-43	-47	-53	-47	-82	-58	-89	-50
-15	-11	-67	-65	-3	-62	-72	-95
-65	-54	-72	-92	-87	-84	-23	-4
-85	-81	-95	-49	-70	-47	-7	-11
-16	-78	-76	-63	-27	-13	-17	-46

Варіант 9

11	57	95	55	19	12	56	70
83	96	94	22	5	58	47	81
70	77	4	73	5	72	14	32
22	56	79	79	32	43	6	70
58	60	95	68	9	29	56	94
36	64	61	1	86	81	33	54
60	48	76	2	66	61	7	79
61	11	56	61	7	54	32	34

Варіант 10

-6	-84	-38	-9	-75	-68	-47	-57
-11	-13	-47	-87	-4	-13	-41	-11
-19	-82	-17	-46	-46	-3	-54	-98
-1	-40	-24	-18	-45	-73	-36	-62
-67	-45	-28	-5	-85	-55	-32	-71
-8	-69	-43	-75	-36	-43	-87	-30
-57	-52	-83	-73	-89	-1	-57	-30
-79	-85	-43	-63	-47	-96	-54	-65

Продовження таблиці 25

Варіант 11

95	40	68	16	82	62	22	87
57	59	17	93	37	27	55	55
72	76	11	49	23	2	12	12
2	25	58	67	80	66	26	15
11	36	9	48	36	74	33	29
80	73	75	81	37	90	33	65
58	16	88	38	80	94	12	28
70	89	90	83	25	62	22	90

Варіант 12

-52	-49	-23	-50	-79	-54	-66	-7
-83	-90	-47	-17	-1	-68	-19	-59
-36	-3	-29	-3	-71	-86	-86	-5
-56	-47	-65	-43	-29	-62	-65	-79
-73	-83	-54	-64	-39	-70	-43	-41
-57	-90	-44	-59	-31	-65	-25	-65
-75	-90	-69	-70	-18	-73	-6	-70
-9	-11	-44	-21	-63	-72	-69	-74

Варіант 13

78	36	97	71	29	55	22	38
66	14	4	22	71	78	84	81
81	80	43	23	54	8	69	32
46	30	31	3	95	75	91	24
85	25	25	17	73	89	53	61
30	87	68	35	71	74	2	26
12	73	71	95	14	65	49	7
73	56	18	15	35	71	14	57

Варіант 14

-36	-22	-64	-85	-45	-84	-16	-72
-11	-73	-9	-37	-39	-73	-44	-56
-6	-20	-54	-51	-49	-68	-11	-14
-92	-61	-93	-62	-17	-89	-74	-69
-48	-29	-82	-74	-79	-21	-7	-19
-8	-39	-16	-59	-23	-47	-54	-24
-60	-51	-17	-16	-11	-95	-25	-24
-64	-79	-29	-9	-96	-39	-36	-17

Варіант 15

54	34	98	12	16	31	88	93
90	35	15	20	23	96	8	17
77	35	5	80	48	6	13	6
20	42	23	6	56	98	25	64
73	56	18	15	35	71	14	57
66	78	40	61	22	63	84	53
3	85	45	46	51	33	32	4
61	59	6	24	92	52	37	87

Варіант 16

-80	-76	-87	-33	-7	-43	-18	-7
-82	-79	-1	-67	-38	-26	-59	-29
-18	-46	-49	-89	-92	-30	-19	-44
-63	-53	-20	-90	-24	-48	-75	-13
-32	-29	-75	-14	-57	-37	-39	-54
-52	-2	-40	-89	-12	-77	-73	-26
-20	-88	-46	-23	-73	-96	-54	-55
-48	-5	-13	-71	-84	-10	-12	-2

Варіант 17

97	27	68	76	88	41	72	61
87	82	90	2	77	54	3	94
55	9	45	42	48	87	41	81
36	48	32	85	6	17	42	12
87	1	29	69	67	68	90	55
72	88	36	97	2	92	65	95
57	51	42	30	76	34	77	2
7	90	31	95	41	32	43	6

Варіант 18

-43	-44	-54	-84	-48	-51	-59	-29
-11	-23	-94	-44	-84	-65	-86	-49
-85	-89	-60	-51	-32	-40	-79	-21
-48	-89	-21	-73	-52	-87	-67	-7
-23	-43	-32	-5	-40	-67	-49	-6
-78	-38	-12	-1	-54	-21	-32	-68
-86	-92	-40	-97	-65	-73	-31	-18
-49	-46	-76	-1	-16	-75	-39	-38

Варіант 19

15	50	59	46	73	87	17	42
71	64	74	2	97	42	56	33
86	62	24	89	5	12	51	10
64	73	37	38	3	27	85	92
49	62	32	25	4	18	70	15
28	88	48	37	14	40	66	87
15	27	77	7	83	23	55	61
65	57	38	63	85	48	68	68

Варіант 20

-63	-25	-53	-51	-5	-7	-67	-28
-29	-50	-88	-80	-95	-24	-81	-44
-49	-6	-50	-8	-50	-40	-8	-27
-91	-60	-46	-70	-65	-7	-69	-7
-56	-49	-3	-14	-9	-46	-36	-67
-45	-21	-69	-95	-98	-95	-15	-97
-31	-44	-64	-9	-51	-25	-34	-4
-70	-9	-50	-95	-9	-58	-26	-67

Продовження таблиці 25

Варіант 21

43	36	9	32	36	73	79	61
30	52	73	20	56	59	82	74
33	58	15	95	35	55	38	86
29	73	16	9	52	75	5	23
34	65	46	24	63	88	93	85
9	50	70	76	12	84	4	51
42	17	23	34	72	70	91	50
68	98	32	36	97	71	74	53

Варіант 22

-10	-91	-14	-62	-10	-68	-93	-16
-61	-70	-28	-91	-26	-1	-81	-5
-11	-58	-6	-25	-44	-39	-50	-89
-71	-4	-79	-42	-66	-34	-78	-30
-32	-78	-89	-29	-48	-1	-47	-23
-81	-22	-29	-76	-86	-3	-93	-67
-24	-13	-23	-26	-63	-10	-96	-77
-23	-97	-41	-3	-51	-81	-94	-90

Варіант 23

63	30	56	3	37	39	92	26
10	33	35	60	16	15	88	91
19	85	88	63	3	5	79	29
22	68	59	16	49	40	39	78
19	87	85	7	59	31	53	9
6	65	31	81	35	61	25	59
40	17	49	50	30	57	15	84
60	64	25	37	9	27	43	65

Варіант 24

-7	-14	-27	-8	-12	-20	-31	-93
-82	-94	-64	-79	-80	-15	-33	-18
-41	-80	-84	-25	-86	-7	-19	-61
-47	-61	-34	-85	-55	-95	-23	-68
-13	-88	-50	-56	-7	-82	-2	-64
-80	-6	-27	-73	-4	-27	-46	-6
-78	-89	-77	-36	-82	-40	-27	-40
-62	-15	-6	-39	-15	-66	-62	-61

Варіант 25

31	7	50	9	23	2	62	55
8	69	18	35	92	38	78	39
95	24	42	32	5	46	22	27
47	9	64	21	30	82	21	26
6	48	19	63	85	3	37	96
80	19	64	64	22	12	31	31
70	28	15	25	14	12	77	54
91	93	54	50	33	82	77	27

Варіант 26

-68	-37	-3	-4	-98	-55	-83	-57
-5	-89	-84	-79	-1	-49	-48	-80
-93	-58	-16	-20	-16	-98	-10	-12
-66	-24	-77	-64	-38	-38	-42	-82
-75	-84	-25	-23	-58	-92	-14	-75
-70	-64	-22	-68	-74	-19	-12	-40
-58	-3	-49	-19	-19	-95	-92	-27
-96	-43	-27	-66	-71	-18	-56	-85

Варіант 27

12	56	63	27	35	70	42	11
11	44	86	8	86	20	38	31
95	23	64	4	93	41	51	9
29	63	51	94	8	9	65	3
16	23	17	43	50	37	82	78
18	8	51	37	18	14	86	85
73	98	5	72	42	45	73	66
46	9	91	61	29	23	78	27

Варіант 28

-57	-2	-81	-43	-97	-53	-9	-8
-43	-89	-84	-45	-80	-92	-51	-82
-11	-31	-19	-80	-58	-50	-20	-37
-66	-80	-24	-21	-72	-5	-59	-91
-89	-21	-12	-89	-72	-97	-68	-25
-57	-38	-26	-43	-93	-45	-53	-33
-25	-29	-7	-48	-41	-50	-86	-86
-33	-41	-38	-4	-91	-71	-60	-46

Варіант 29

83	1	58	17	27	77	42	93
23	57	43	21	2	19	82	63
58	98	12	11	88	88	42	44
46	37	28	27	95	32	46	90
54	52	34	98	73	62	14	93
77	94	61	68	7	4	63	88
32	13	52	49	42	66	87	12
68	47	23	29	80	89	60	33

Варіант 30

-76	-42	-9	-72	-9	-94	-94	-12
-71	-86	-57	-98	-1	-6	-41	-54
-83	-66	-52	-75	-16	-68	-24	-33
-80	-21	-31	-49	-13	-83	-8	-4
-60	-61	-98	-25	-79	-43	-36	-58
-67	-37	-56	-26	-7	-90	-57	-25
-73	-29	-8	-40	-46	-58	-37	-26
-97	-34	-41	-73	-91	-63	-63	-4

Продовження таблиці 25

Варіант 31

82	16	25	76	43	64	82	11
30	61	19	63	5	10	54	39
76	87	58	28	65	77	37	7
73	12	55	30	67	86	61	68
61	11	27	45	10	46	36	18
32	34	4	6	35	67	35	83
66	11	23	23	93	19	30	43
32	12	72	76	91	62	73	59

Варіант 32

-50	-43	-58	-10	-23	-34	-68	-63
-75	-64	-67	-46	-65	-51	-49	-14
-91	-86	-39	-10	-79	-84	-7	-19
-47	-80	-3	-43	-11	-87	-97	-38
-50	-44	-42	-46	-83	-41	-27	-86
-29	-8	-78	-80	-88	-24	-64	-23
-85	-62	-65	-35	-67	-11	-58	-78
-61	-8	-27	-57	-90	-70	-27	-25

Варіант 33

29	26	37	63	14	35	31	61
24	62	89	75	51	37	49	77
38	67	36	98	5	92	61	39
51	28	95	4	70	21	14	55
85	14	33	79	30	87	65	22
83	38	47	77	69	43	59	84
97	69	7	78	25	76	57	8
18	21	26	71	62	59	22	33

Варіант 34

-26	-29	-42	-31	-28	-30	-41	-54
-65	-94	-30	-63	-20	-68	-73	-31
-10	-92	-52	-1	-15	-38	-15	-2
-6	-24	-66	-92	-32	-6	-15	-63
-65	-33	-29	-55	-33	-3	-88	-25
-76	-18	-51	-49	-24	-85	-48	-41
-67	-36	-68	-2	-74	-72	-90	-75
-12	-21	-53	-72	-4	-91	-73	-18

Варіант 35

76	95	50	39	25	11	29	64
27	33	92	78	65	29	89	38
73	60	64	36	36	42	19	31
43	36	32	30	24	24	5	97
92	56	86	42	36	30	21	96
13	2	24	80	71	62	10	84
68	98	61	8	19	86	40	65
85	78	10	88	33	18	16	20

Варіант 36

-62	-62	-70	-97	-35	-76	-78	-28
-53	-36	-9	-62	-1	-93	-5	-92
-36	-38	-42	-83	-52	-97	-98	-98
-59	-90	-79	-73	-91	-51	-34	-84
-24	-85	-3	-82	-21	-56	-20	-50
-14	-37	-35	-73	-96	-2	-29	-51
-68	-79	-41	-17	-28	-69	-54	-45
-7	-34	-2	-89	-12	-81	-86	-79

Варіант 37

67	5	68	28	40	82	68	52
95	42	78	35	25	14	85	48
63	32	78	84	65	69	50	88
89	8	53	68	39	45	94	13
12	1	25	85	64	36	48	61
59	54	42	75	78	34	96	11
74	64	92	77	10	11	95	38
37	24	58	34	17	19	92	58

Варіант 38

-15	-52	-52	-35	-77	-76	-59	-49
-58	-67	-59	-42	-38	-59	-66	-70
-97	-69	-91	-53	-13	-64	-24	-27
-15	-88	-43	-53	-43	-90	-35	-42
-5	-18	-32	-3	-52	-7	-61	-75
-45	-14	-10	-13	-27	-23	-66	-84
-8	-17	-37	-16	-55	-46	-43	-37
-19	-70	-68	-71	-42	-93	-10	-72

Варіант 39

88	72	88	68	4	83	76	7
35	7	70	61	50	94	3	94
80	3	26	40	20	75	98	87
40	13	11	59	8	84	84	5
82	86	33	27	81	74	19	87
80	77	51	98	52	90	52	47
77	75	56	87	98	74	52	3
12	56	75	72	15	21	3	97

Варіант 40

-22	-54	-18	-1	-56	-9	-21	-25
-91	-71	-61	-55	-74	-58	-8	-7
-74	-45	-73	-20	-53	-29	-64	-5
-82	-23	-67	-76	-48	-40	-66	-85
-13	-90	-57	-22	-3	-70	-17	-16
-32	-19	-95	-40	-51	-26	-56	-36
-16	-13	-48	-57	-65	-96	-69	-89
-86	-92	-10	-13	-46	-3	-11	-40

Продовження таблиці 25

Варіант 41

43	83	29	65	46	60	73	42
8	82	77	26	55	22	75	69
56	41	38	30	41	16	15	62
80	59	86	7	26	79	81	60
34	39	54	17	55	22	49	94
62	43	90	44	40	66	25	46
39	75	48	86	68	49	77	69
29	49	46	3	13	78	34	31

Варіант 42

-61	-89	-74	-45	-95	-38	-30	-17
-27	-86	-93	-41	-86	-18	-70	-56
-78	-7	-62	-8	-32	-46	-44	-88
-21	-97	-24	-66	-63	-83	-83	-48
-19	-67	-14	-91	-4	-36	-11	-73
-46	-52	-15	-13	-20	-20	-41	-42
-68	-4	-82	-98	-52	-42	-87	-29
-6	-76	-25	-63	-73	-81	-14	-41

Таблиця 26 – Варіанти розподілу ймовірностей

№ варіанта	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8
1	0.19	0.06	0.10	0.08	0.27	0.01	0.26	0.03
2	0.05	0.06	0.01	0.03	0.22	0.22	0.21	0.20
3	0.09	0.14	0.14	0.08	0.15	0.11	0.18	0.10
4	0.18	0.14	0.14	0.21	0.06	0.01	0.10	0.15
5	0.32	0.13	0.22	0.05	0.13	0.03	0.08	0.04
6	0.11	0.08	0.05	0.19	0.03	0.13	0.21	0.21
7	0.23	0.12	0.02	0.09	0.24	0.16	0.13	0.02
8	0.05	0.05	0.08	0.05	0.18	0.23	0.19	0.17
9	0.22	0.11	0.08	0.17	0.13	0.16	0.08	0.06
10	0.12	0.10	0.23	0.04	0.04	0.20	0.02	0.24
11	0.18	0.04	0.05	0.07	0.03	0.08	0.21	0.34
12	0.06	0.26	0.21	0.19	0.08	0.06	0.01	0.13
13	0.10	0.10	0.19	0.13	0.19	0.05	0.19	0.05
14	0.13	0.07	0.06	0.16	0.14	0.08	0.24	0.12
15	0.19	0.16	0.18	0.03	0.01	0.29	0.05	0.09
16	0.16	0.13	0.19	0.03	0.11	0.17	0.08	0.11
17	0.08	0.16	0.11	0.11	0.15	0.10	0.12	0.18
18	0.03	0.02	0.16	0.26	0.18	0.04	0.02	0.28
19	0.22	0.09	0.04	0.13	0.02	0.15	0.22	0.12
20	0.02	0.10	0.24	0.24	0.22	0.09	0.06	0.04
21	0.15	0.16	0.01	0.00	0.19	0.16	0.06	0.26
22	0.12	0.22	0.17	0.00	0.24	0.09	0.14	0.03
23	0.11	0.08	0.02	0.14	0.16	0.17	0.15	0.17
24	0.18	0.01	0.15	0.19	0.13	0.17	0.15	0.03
25	0.18	0.15	0.03	0.13	0.13	0.22	0.16	0.01

Продовження таблиці 26

№ варіанта	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8
26	0.05	0.20	0.14	0.20	0.09	0.07	0.11	0.14
27	0.06	0.17	0.08	0.16	0.16	0.09	0.12	0.16
28	0.18	0.02	0.08	0.21	0.07	0.19	0.07	0.18
29	0.07	0.13	0.08	0.18	0.20	0.05	0.20	0.09
30	0.22	0.12	0.01	0.23	0.24	0.12	0.05	0.01
31	0.17	0.32	0.09	0.16	0.04	0.04	0.07	0.12
32	0.00	0.33	0.25	0.09	0.02	0.18	0.05	0.08
33	0.22	0.00	0.11	0.01	0.11	0.03	0.27	0.24
34	0.19	0.05	0.12	0.01	0.16	0.14	0.23	0.10
35	0.22	0.07	0.04	0.22	0.01	0.14	0.19	0.12
36	0.14	0.01	0.12	0.22	0.06	0.23	0.17	0.05
37	0.13	0.04	0.12	0.04	0.25	0.11	0.26	0.05
38	0.07	0.02	0.21	0.22	0.17	0.14	0.17	0.01
39	0.10	0.06	0.13	0.13	0.16	0.23	0.08	0.11
40	0.10	0.20	0.10	0.01	0.12	0.18	0.15	0.14
41	0.02	0.14	0.14	0.08	0.04	0.25	0.10	0.23
42	0.09	0.01	0.09	0.17	0.24	0.19	0.12	0.10

Контрольні запитання.

1. Що таке прийняття рішення?
2. Вибір оптимального варіанта розв’язання для випадку, коли кожному варіанту розв’язання відповідає один зовнішній стан.
3. Вибір оптимального варіанта розв’язання для випадку, коли кожному варіанту розв’язання, унаслідок різних зовнішніх умов, можуть відповідати різні результати розв’язків.
4. Мінімаксний критерій (ММ).
5. Умови, за яких використовується мінімаксний критерій.
6. Критерій Байєса-Лапласа (BL-критерій).
7. Умови, за яких використовується критерій Байєса-Лапласа.
8. Критерій Севіджа (S-критерій).
9. Умови, за яких використовується критерій Севіджа.

Задача № 5

Класифікація об'єктів. Стратегія найближчого сусіда.

Стратегія далекого сусіда

Основна мета *кластерного аналізу* – виділити у вихідних багатомірних даних такі однорідні підмножини, у яких об'єкти усередині групи були б схожі один на одного, а об'єкти з різних груп – не схожі. Під "подібністю" мається на увазі близькість об'єктів у багатомірному просторі ознак, і тоді задача зводиться до виділення в цьому просторі природних скупчень (кластерів) об'єктів, що вважаються однорідними групами.

У кластерному аналізі існує проблема виміру близькості об'єктів. Основні труднощі, що виникають при цьому – неоднозначність вибору способу нормування й визначення відстані між об'єктами.

Нормування показників (ознак) об'єктів – це перехід до деякого однакового опису всіх ознак і введення нової умовної одиниці виміру. Нормування необхідне, коли ознаки вимірювані в різних одиницях виміру.

Наведемо найбільш розповсюджені способи нормування ознак (перехід від вихідних значень x до нормованого z):

$$z^1 = (x - \bar{x})/\sigma,$$

$$z^2 = x/\bar{x},$$

$$z^3 = x/x',$$

$$z^4 = x/x_{\max},$$

$$z^5 = (x - \bar{x})/(x_{\max} - x_{\min}),$$

де $\bar{x}, \sigma$ – відповідно середнє й середнє квадратичне відхилення ознаки x; x' – деяке еталонне (нормативне) значення x, $x_{\max}, x_{\min}$ – найбільше й найменше значення x.

Відстанню (метрикою) між об'єктами в просторі ознак є така величина $d(x, y)$, що задовольняє аксіоми:

1) симетрія: $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$,

2) нерівність трикутника. Дано три об'єкти x, y, z, відстані між ними задовольняють умову: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

3) розрізнення нетотожних об'єктів: якщо $d(x, y) \neq 0$, те $x \neq y$,

4) нерозрізненість ідентичних об'єктів: якщо $d(x, y) = 0$, то x і y ідентичні.

Перераховані чотири вимоги повинні бути обов'язковими атрибутами міри подібності між об'єктами. Розглянемо основні способи визначення близькості між об'єктами або міри подібності. Відокремлюють такі метрики:

Лінійна відстань (манхетенська відстань) або відстань міських кварталів):

$$d_{ij}^{L} = \sum_{k=1}^{m} \left| x_{ik} - x_{jk} \right|, \qquad (16)$$

де d_{ij} – відстань між об'єктами i, j, x_{ik} – значення k-ї ознаки для i-го об'єкта;

Евклідова відстань:

$$d_{ij}^{E} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \left(x_{ik} - x_{jk} \right)^2}, \qquad (17)$$

Узагальнена відстань Мінковського:

$$d_{ij}^{P} = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{m} \left(x_{ik} - x_{jk} \right)^p}. \qquad (18)$$

Метрики відстані мають недоліки, що полягають у тому, що оцінка подібності залежить від розходжень у зсуві даних. Ознаки, у яких абсолютні значення і стандартні відхилення одночасно великі, можуть зменшити вплив ознак із меншими абсолютними розмірами і стандартними відхиленнями. Щоб зменшити такий вплив, вихідні дані нормують за допомогою нормувань z^1 або z^5.

Огляд методів кластерного аналізу

Хоча загальноприйнятого строгого математичного визначення поняття «кластер» немає, багато дослідників відокремлюють основні *властивості кластерів* – щільність, дисперсію, розмір, форму й віддільність.

Щільність – це властивість, що дозволяє визначити кластер як скупчення крапок у просторі даних, відносно щільне в порівнянні з іншими областями простору, що містять або мало крапок, або не мають їх зовсім.

Дисперсія характеризує ступінь розсіювання крапок у просторі відносно центру кластера. Дисперсія й щільність взаємозалежні. Кластер можна назвати «щільним», якщо всі крапки знаходяться близько до його центру ваги.

Властивість кластерів *розмір.* пов'язаний з дисперсією. Якщо кластер можна ідентифікувати, то можна виміряти і його радіус. Ця властивість корисна, якщо розглянуті кластери є гіперсферами в багатомірному просторі.

Форма – це розташування крапок у просторі. Незважаючи на те що кластери зображують у формі гіперсфер або еліпсоїдів, існують кластери, які мають подовжені форми.

Віддільність характеризує ступінь перекриття кластерів і те наскільки далеко один від одного вони розташовані в просторі.

Згідно Еверіту, кластери – це безперервні області простору з відносно високою щільністю крапок, відділені від інших таких же областей областями з відносно низькою щільністю крапок.

Кластерні методи утворюють сім основних сімейств:

1) ієрархічні агломеративні методи;
2) ієрархічні дивізимні методи;
3) ітеративні методи угруповання;
4) методи пошуку модальних значень щільності;
5) факторні методи;

6) методи згущень;

7) методи, що використовують теорію графів.

Ці сімейства характеризують різні підходи до створення груп, і застосування різних методів до одних і тих же даних може призвести до результатів, які дуже відрізняються.

Із сімейств кластерних методів на практиці найчастіше вживаються *ієрархічні агломеративні методи*, що використовують метрики відстані d_{ij}^{L}, d_{ij}^{E}, d_{ij}^{P} для визначення міри подібності між об'єктами. Ієрархічні агломеративні методи розрізняються, головним чином, *правилами (стратегіями) побудови кластерів*. Існує багато стратегій створення кластерів, кожна з яких сприяє появі специфічних ієрархічних методів, а саме найближчого сусіда, далекого сусіда, середнього незваженого зв'язку, гнучкий, агломеративного об'єднання та інші. Однак, усі ці методи підпорядковуються єдиному алгоритму.

Прямий алгоритм класифікації n об'єктів.

Нехай задана матриця $A_{n\times m}$, де n – число об'єктів, m – число ознак, що описують кожний об'єкт; $a_{ij}, i=1,...,n, j=1,...,m$ – елемент матриці $A_{n\times m}$, що визначає значення j-ї ознаки для i-го об'єкта; $a_{ij} \geq 0$.

Крок 1. На цьому кроці кожний об'єкт вважається окремим кластером, тобто на початку маємо n кластерів. Обчислимо усі відстані d_{ij}, i, j = 1,2,...,n по одній з формул (1) – (3). Складемо матрицю G розміром $n \times n$ відстаней між усіма n об'єктами, тобто

$$G = \begin{Vmatrix} d_{11} & d_{12} & ... & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & ... & d_{2n} \\ . & . & . & . \\ d_{n-1,1} & d_{n-1,2} & ... & d_{n-1,n} \\ d_{n1} & d_{n2} & ... & d_{nn} \end{Vmatrix}$$

Крок 2. У матриці G відшукаємо мінімальну відстань d_{ij}, $i \neq j$, (це означає, що i-й і j-й об'єкти мають максимальну міру подібності) і складемо з них новий (n+1)-й кластер. Позначимо цей кластер через $h=(i \cup j)$. Якщо є декілька мінімальних d_{ij}, то обирають який-небудь із них.

Крок 3. Обчислимо відстані між новим кластером h та іншими об'єктами, що залишилися ще некласифікованими, за формулою

$$d_{kh} = \alpha_1 d_{ik} + \alpha_2 d_{jk} + \beta d_{ij} + \gamma \left| d_{ik} - d_{jk} \right| \qquad (19)$$

$$k = 1,2,...,i-1,i+1,...,j-1,j+1,...,n,$$

де d_{ik} – відстань між k-м об'єктом і i-м об'єктом, що входять у кластер h, d_{jk} – відстань між k-м об'єктом і j-м об'єктом, що входить у кластер h, d_{ij} – відстань, що була знайдена на кроці 2. За формулою (19) не визначається відстань між окремими об'єктами, а тільки відстань між кластером і кластером або між кластером і об'єктом.

Параметри α_1, α_2, β, γ визначають стратегії об'єднання кластерів у нові кластери.

Крок 4. Побудуємо нову матрицю відстаней G_1 з матриці G шляхом додавання (n+1)-го рядка і (n+1)-го стовпця з елементами d_{kh}, k = 1,2,...,i-1,i+1,..., j-1,j+1,...,n, потім i-й і j-й рядки, а також i-й і j-й стовпці викреслюються. Для матриці G_1 шукаємо знову мінімальну відстань d_{ij}, $i \neq j$ і формуємо наступний (n+2)-і кластер. Далі, якщо цей кластер має номер 2n-1, то процедура формування кластерів закінчується й переходимо до кроку 5, якщо номер кластера не дорівнює 2n-1, то переходимо до кроку 3. На кожному кроці запам'ятовуємо мінімальну величину і до якого кластера вона належить.

Крок 5. Будуємо так звану дендрограму (графік покрокової класифікації об'єктів), де на осі абсцис відкладаємо номери об'єктів (кластерів), а на осі ординат рівень об'єднання або значення мінімальних d_{ij}. Кінець алгоритму.

Монотонні стратегії об'єднання

Стратегія найближчого сусіда. Відстань між двома кластерами визначається як відстань між двома найближчими об'єктами в цих кластерах:

$$d_{kh} = \min(d_{ik}, d_{jk}) \qquad (20)$$

Параметри стратегії: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5, \beta = 0, \gamma = -0.5$.

Стратегія є монотонною, тобто від кроку до кроку значення максимальної міри подібності не зменшується.

Така стратегія стійка до будь-яких перетворень даних і будь-якого переупорядкування об'єктів у матриці A. Головний недолік стратегії найближчого сусіда полягає в тому, що вона веде до появи «ланцюжків» (великих довгастих кластерів).

Стратегія далекого сусіда. У цій стратегії відстань між двома кластерами визначається як відстань між двома найвіддаленішими такими кластерами:

$$d_{kh} = \max(d_{ik}, d_{jk}). \qquad (21)$$

Параметри стратегії: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5, \beta = 0, \gamma = 0.5$.

Головний недолік такої стратегії полягає в тому, що на перших кроках утворюються кластери з несхожих об'єктів.

Приклад

Дано матрицю ознак $\| e_{ij} \|$ розміром $n \times m$, n = 7, m = 2. Здійснити класифікацію об'єктів у схожих групах (кластери), використовуючи прямий алгоритм автоматичної класифікації. Для обчислення відстані між об'єктами необхідно використовувати метрику Евкліда й стратегію найближчого сусіда.

Розв'язання.

Крок 1. Маємо 7-м об'єктів, що описуються двома ознаками e_1, e_2.

$$\| e_{ij} \| = \left\| \begin{matrix} 8 & 5 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 9 & 3 \\ 7 & 5 \\ 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{matrix} \right\|$$

Припустимо, що кожний окремий об'єкт визначає кластер. Побудуємо початкову матрицю відстаней G. Для цього обчислимо відстані Евкліда за формулою:

$$d^{E}_{ij} = \sqrt{\sum_{k=1}^{2}\left(e_{ik} - e_{jk}\right)^2} \;,\; i, j = 1, 2, \; . \; . \; . \; , 7 \;,\; i \neq j \;.$$

Матриця відстаней симетрична і має такий вигляд (табл. 27):

Таблиця 27 – Матриця відстаней G

№ кластера	1	2	3	4	5	6	7		min
1	0,00	5,66	5,83	2,24	1,00	4,12	4,24		1,00
2		0,00	1,41	5,39	5,00	5,00	1,41		1,41
3			0,00	6,08	5,00	4,12	2,00		2,00
4				0,00	2,83	5,83	4,12		2,83
5					0,00	3,16	3,61		3,16
6						0,00	4,12		4,12
7							0,00		

Крок 2. Елемент $d_{15} = \min\limits_{i,j} d^{E}_{ij} = 1$ матриці відстаней G є мінімальним, тобто об'єкти 1 і 5 найбільш схожі і складають новий 8-й кластер або $8 = (1 \cup 5)$.

min=1.00 Кластер 8: 1,5

Крок 3,4. Обчислимо за формулою (20) відстані між новим 8-м кластером та іншими об'єктами, що залишилися некласифікованими, тобто

$$d_{k8} = \min\left(d_{1k}, d_{5k}\right),\; k = 2, 3, 4, 6, 7,$$

$$d_{28} = 5{,}00,\;\; d_{38} = 5{,}00,\;\; d_{48} = 2{,}24,\;\; d_{68} = 3{,}16,\;\; d_{78} = 3{,}61$$

Нова матриця відстаней G_1 формується з матриці G шляхом додавання 8-го рядка і 8-го стовпця з елементами d_{28} , d_{38} , d_{48} , d_{68}, d_{78} , а потім 1-й, 5-й рядки і 1-й, 5-й стовпці віддаляються (табл. 28):

Таблиця 28 – Матриця відстаней G_1

№ кластера	2	3	4	6	7	8		min
2	0,00	1,41	5,39	5,00	1,41	5,00		1,41
3		0,00	6,08	4,12	2,00	5,00		2,00
4			0,00	5,83	4,12	2,24		2,24
6				0,00	4,12	3,16		3,16
7					0,00	3,61		3,61
8						0,00		

На матриці G_1 шукаємо мінімальний елемент, тобто елемент 1,41, що відповідає d_{23} або d_{27}. Обираємо який-небудь з них, наприклад, $d_{23} = 1{,}41$, отже об'єкти 2 і 3 поєднуються в новий 9-й кластер min = 1,41. Кластер 9 : 2,3

Оскільки номер 9-го кластера не дорівнює (2n-1) = 13, то повторюємо кроки 3, 4. За формулою (20) обчислимо відстані між 9-м кластером та іншими об'єктами й кластерами, тобто

$$d_{k9} = \min(d_{2k}, d_{3k}), \text{ k = 4, 6, 7, 8,}$$

$$d_{49} = 5{,}39,\ d_{69} = 4{,}12,\ d_{79} = 1{,}41,\ d_{89} = 5.00.$$

Нова матриця відстаней G_2 формується з матриці G_1 шляхом додавання рядка й стовпця з елементами d_{49}, d_{69}, d_{79}, d_{89}, потім 2-й, 3-й рядки і 2-й, 3-й стовпці віддаляються (табл. 29):

Таблиця 29 – Матриця відстаней G_2

№ кластера	4	6	7	8	9		min
4	0,00	5,83	4,12	2,24	5,39		2,24
6		0,00	4,12	3,16	4,12		3,16
7			0,00	3,61	1,41		1,41
8				0,00	5,00		5,00
9					0,00		

На матриці G_2 шукаємо мінімальний елемент. Це елемент 1,41, що відповідає d_{79}, тобто об'єкти 7 і 9 поєднуються в новий 10-й кластер min = 1.41. Кластер 10 : 7, 9.

Оскільки номер $10 \neq 13$, то знову повторюємо кроки 3, 4.

Обчислюємо відстані між 10-м кластером та іншими об'єктами й кластерами, тобто

$$d_{k,10} = \min(d_{7k}, d_{9k}), \text{ k = 4, 6, 8.}$$

$$d_{4,10} = 4{,}12,\ d_{6,10} = 4{,}12,\ d_{8,10} = 3{,}61.$$

Нова матриця відстаней G_3 фобрмується з матриці G_2 шляхом додавання рядка й стовпця з елементами $d_{4,10}$, $d_{6,10}$, $d_{8,10}$, причому 7-й, 9-й рядки і 7-й, 9-й стовпці віддаляються (табл. 30)

Таблиця 30 – Матриця відстаней G_3

№ кластера	4	6	8	10		min
4	0,00	5,83	2,24	4,12		2,24
6		0,00	3,16	4,12		3,16
8			0,00	3,61		3,61
10				0,00		

Мінімальний елемент матриці G_3 є $d_{4,8} = 2{,}24$, тобто об'єкти 4 і 8 поєднуються в новий 11-й кластер (min = 2,24). Кластер 11: 4, 8.

Оскільки номер $11 \neq 13$, то знову повторюємо кроки 3, 4.

Обчислимо відстані між 11-м кластером та іншими об'єктами або кластерами, тобто

$$d_{k,11} = \min(d_{4k}, d_{8k}),\ k = 6,\ 10.$$

Отже, $d_{6,11} = 3{,}16$, $d_{10,11} = 3{,}61$.

Нова матриця відстаней G_4 формується з матриці G_3 шляхом додавання рядка й стовпця з елементами $d_{6,11}$, $d_{10,11}$, причому 4-й, 8-й рядки і 4-й, 8-й стовпці віддаляються (табл. 31):

Таблиця 31 – Матриця відстаней G_4

№ кластера	**6**	**10**	**11**		min
6	0,00	4,12	3,16		3,16
10		0,00	3,61		3,61
11			0,00		

Мінімальний елемент матриці G_4 – $d_{6,11} = 3{,}16$, тобто об'єкти 6 і 11 поєднуються в новий 12-й кластер (min = 3,16). Кластер 12: 6, 11.

Оскільки номер $12 \neq 13$, то знову повторюємо кроки 3, 4.

Обчислимо відстані між 12-м кластером та іншими об'єктами й кластерами або об'єктами, що залишилися, тобто

$$d_{k,12} = \min(d_{6k}, d_{11k}),\ k = 10,\ d_{10,12} = 3{,}61.$$

Нова матриця відстаней G_5 формується з матриці G_4 шляхом додавання рядка й стовпця з елементом $d_{10,12}$, причому 6-й, 11-й рядки і 6-й, 11-й стовпці віддаляються(табл. 32):

Таблиця 32 – Матриця відстаней G_5

№ кластера	**10**	**12**		min
10	0,00	3,61		3,61
12		0,00		

Мінімальний елемент матриці G_5 єдиний $d_{10,12} = 3.61$, тобто об'єкти 10 і 12 поєднуються в новий 13-й кластер. Через те що номер 13 = 13, алгоритм закінчується, й переходимо до кроку 5.

Крок 5.Будуємо дендрограму об'єднань(рис. 8):

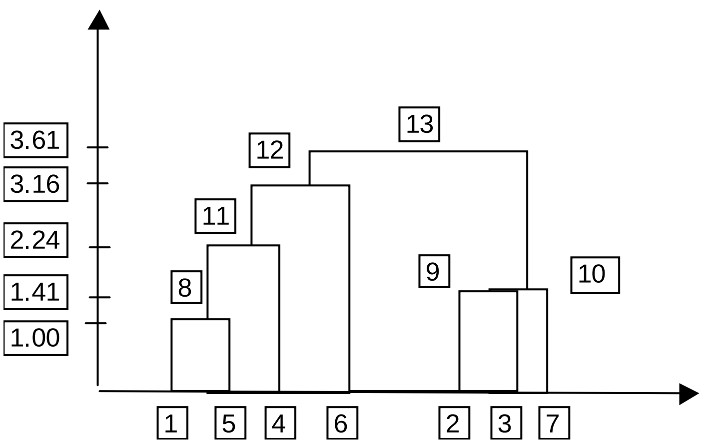

Рис. 8 – Дендрограма об'єднань

Порядок виконання роботи

Дано матрицю ознак, розміром 8×2. Класифікувати об'єкти в подібні групи, використовуючи як метрику Евклідову відстань і такі стратегії об'єднання:

1) найближчого сусіда;

2) далекого сусіда.

Матриця ознак обирається за номером утвореним двома останніми цифрами залікової книжки:

n – номер, утворений двома останніми цифрами залікової книжки;

k – номер варіанта;

$$k = \begin{cases} n & 1 \le n \le 42 \\ n - 42 & 43 \le n \le 84 \\ n - 84 & 85 \le n \le 99. \end{cases}$$

Якщо дві останні цифри в номері залікової книжки дорівнюють нулю, то k = 42.

Варіанти зазначені в таблиці 25 задачі № 4. З вихідної матриці як матрицю ознак обирають перших два стовпці, при цьому знак числа не враховується.

Контрольні запитання

1. Основна мета кластерного аналізу.
2. Що таке "подібність" об'єктів?
3. Нормування показників (ознак) об'єктів.
4. Найбільш розповсюджені способи нормування ознак.
5. Яка величина може називатися відстанню (метрикою) між об'єктами в просторі ознак?
6. Лінійна відстань (манхетенська відстань або відстань міських кварталів).
7. Евклідова відстань.
8. Узагальнена відстань Мінковського.
9. Властивість кластерів: щільність.
10. Властивість кластерів: дисперсія.
11. Властивість кластерів: розмір.
12. Властивість кластерів: форма.
13. Властивість кластерів: віддільність.
14. Визначення кластерів за Еверітом.
15. Прямий алгоритм класифікації n об'єктів.
16. Стратегія найближчого сусіда.
17. Стратегія далекого сусіда.

Навчальне видання

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт,
самостійної роботи та контрольних робіт з дисципліни

“Основи системного аналізу”

(для студентів 3 курсу заочної форми навчання за напрямом підготовки 6.060101 ”Будівництво”, спеціальностей “Промислове та цивільне будівництво”, “Міське будівництво та господарство”)

Укладачі: **Федоров** Микола Вікторович,
Хренов Олександр Михайлович.

Відповідальний за випуск *О. Б. Костенко*

Редактор *О. А. Норик*
Комп’ютерне верстання *М. В.Федоров*

План 2011, поз. 456М

Підп. до друку 05.10.2011	Формат 60х84 1/16
Друк. на ризографі	Ум. друк. арк. 2,0
Зам. №	Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб´єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12. 05. 2011р.